Università degli Studi di L'Aquila - Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica

Catalogo Corsi

Pagina compilata il 15/09/2019

Programma del Corso "Geometria B"

- Codice: DT0019
- Tipo di corso: Obbligatorio (Laurea in Matematica percorso Generale)
- Livello del corso: Lauree di Primo Livello
- Semestre: 1

Numero di crediti ECTS: (Laurea in Matematica) 12 (carico 300 ore)

Docenti: Alessandro Fedeli, Barbara Nelli

1	**Obiettivi del corso**	Si prevede che lo studente acquisisca le nozioni di base di topologia necessarie per portare a termine la laurea di primo livello. Si prevede inoltre che, dopo aver acquisito alcune nozioni di teoria delle curve e super ci, dal punto di vista intrinseco ed estrinseco, sia capace di risolvere problemi su tali temi.
2	**Contenuti del corso e risultati formativi (descrittori di Dublino)**	Gli argomenti trattati nel corso comprendono: • TOPOLOGIA GENERALE: 1) Spazi topologici, funzioni continue e omeomorfismi. Spazi metrici. 2) Costruzioni basilari: sottospazi, prodotti e quozienti. 3) Spazi di Hausdorff, altre proprietà di separazione e assiomi di numerabilità. 4) Compattezza. Teorema di Heine-Borel. Teorema di Tychonoff. Compattezza per successioni. 5) Connessione e connessione per archi. 6) Cenni su varietà topologiche, triangolazioni e classificazione delle superfici compatte (caratteristica di Eulero-Poincaré) • GEOMETRIA DIFFERENZIALE: 1. Curve parametrizzate, curve regolari e lunghezza d'arco. Riferimento di Fr enet. Teorema esistenza e unicit a delle curve, data la curvatura e la torsione. 2. Defi nizione di super fici regolari e primi esempi (piano, sfera con tutte le parametrizzazioni). Esercizi della settimana precedente. Super fici regolari de finite come gra fici e come controimmagini di valori regolari. 3. Un insieme defi nito come controimmagine di un valore regolare e una superfi cie regolare (senza dimostrazione). Superfi ci di rotazione. Mappe di fferenziabili de finite su super fici regolari. Mappe di fferenziabili tra superfici regolari. Di fferenziale di una mappa de finita tra due super fici regolari. De finizione di vettore tangente ad una super cie. Dimostrazione del fatto che l'insieme dei vettori tangenti ad una super ficie in un punto e l'immagine di R2 tramite il di fferenziale di una parametrizzazione della super ficie. 4. Esercizi della settimana precedente. Vettore normale ad una superfi cie. Prima forma fondamentale. Calcolo della lunghezza di una curva su una super ficie. Calcolo dell'angolo tra due curve di una super ficie, in particolare calcolo dell'angolo tra le curve coordinate. Mappa di Gauss, di fferenziale della mappa di Gauss. Curvatura normale, sezione normale. Seconda forma fondamentale. Curvature principali. Teorema di Olinde Rodrigues. Curvatura di Gauss e curvatura media. classi ficazione dei punti di una superfi cie: ellittici, parabolici, iperbolici, planari. 5. Mappa di Gauss in coordinate locali. Indicatrice di Dupin. Direzioni asintotiche. 6. Direzioni coniugate: de finizione e caratterizzazione. Coe fficienti delle forme fondamentali per una superfi cie di rotazione. Equazione delle curve asintotiche. Curve asintotiche della catenoide e dell'elicoide. Super ci minime: de nizione e caratterizzazione come punti critici del funzionale area. De finizione dei parametri isotermi su una super cie. Le funzioni coordinate di una super ficie minima sono funzioni armoniche dei parametri isotermi. Determinazione dell'equazione di un gra fico minimo. Calcolo della super ficie di Scherck. 7. Discussione euristica sulla geometria intrinseca delle super fici. Defi nizione di isometria e isometria locale tra super fici. Due super fici sono localmente isometriche se hanno parametrizzazioni con coe fficienti della prima forma fondamentale uguaii. De nizione di mappa conforme e mappa conforme locale tra super ci. Condizione di conformit a locale tra superfi ci (senza dimostrazione). Teorema: due super fici regolari sono sempre localmente conformi (senza dimostrazione). Simboli di Christoff el, equazione di Gauss ed equazioni di Codazzi-Mainardi. Calcolo dei simboli di Christo ffel per una super ficie di rotazione. Teorema Egregium. Teorema fondamentale della teoria locale delle super fici (senza dimostrazione). 8. De finizione di campo di vettori tangenti su una superfi cie. Diff erenziabilit a di un campo di vettori. Campi di vettori

		lungo una curva della super cie. Derivata covariante. Campi di vettori paralleli. Il prodotto scalare tra due campi paralleli lungo una curva è costante. De nizione di trasporto parallelo. Il trasporto parallelo è una isometria. Calcolo di trasporto parallelo lungo un parallelo di S2: De finizione di geodetica parametrizzata. De finizione globale di curva geodetica. Valore algebrico della derivata covariante. Curvatura geodetica. Espressione del valore algebrico della derivata covariante in funzione della prima forma fondamentale. Dimostrazione dell'esistenza e unicit à del trasporto parallelo. Formula di Liouville per il calcolo della curvatura geodetica. Equazioni diff erenziali delle geodetiche su una super cie. Calcolo delle equazioni di fferenziali delle geodetiche nel caso delle super fici di rotazione. 9. Teorema di Gauss-Bonnet: enunciato e prova nel caso locale. Enunciato e dimostrazione del teorema di Gauss-Bonnet globale. Applicazioni del teorema di Gauss-Bonnet. Teorema di Jacobi. 10. De finizione di campo di vettori di fferenziabile su una super cie e di punto singolare. Teorema dell'indice di Hopf-Poincar é. Applicazioni del teorema dell'indice. 11.Mappa esponenziale. Teoremi connessi. Coordinate geodetiche e intorni normali. Applicazioni delle coordinate polari geodetiche e degli intorni normali. Caso della curvatura costante: Teorema di Minding.Caso della curvatura di segno costante: andamento della lunghezza di un arco di cerchio geodetico. Calcolo di K(p) in termini della lunghezza dei cerchi geodetici intorno a p. Teorema di minimizzazione delle geodetiche e conseguenze.Proprietà di Rigidità della Sfera. Dimostrazione di come discende dal Teorema: S compatta connessa con curvatura costante K è una sfera. Enunciato e dimostrazione del Lemma Focale. Prova del Lemma che garantisce l'esistenza di un punto strettamente ellittico su una superficie compatta. Prova delle rigidita' della sfera. Enunciati delle generalizzazioni. In particolare teorema di Alexandrov e Teorema di Hopf. Alla fine del corso, lo studente dovrebbe: • Lo studente deve acquisire profonda conoscenza della teoria delle curve e delle superfici immerse in R3 e conoscenza delle nozioni di base della geometria intrinseca delle superfici. Lo studente deve inoltre acquisire una solida conoscenza di tutti i concetti di base della topologia generale. • Lo studente deve essere capace di risolvere problemi riguardanti la teoria delle curve e delle superfici immerse e qualche problema riguardante la geometria intrinseca delle superfici. Inoltre deve saper riconoscere quando le nozioni di topologia acquisite si rivelino necessarie alla comprensione di altre problematiche • Lo studente deve mostrare abilita' nel comprendere problemi di teoria delle curve e superfici e di topologia e riconoscere il metodo più' opportuno per risolverli. • Lo studente deve essere in grado di spiegare gli enunciati e le dimostrazioni dei teoremi di teoria delle curve e delle superfici e della topologia • Lo studente deve aver acquisito la capacita' di leggere e capire parti più' avanzate di teoria intrinseca delle superfici e di topologia.
3	**Prerequisiti**	Corsi del primo anno del corso di laurea in matematica
4	**Modalita' e lingua di insegnamento**	Lezioni Frontali **Lingua**: Italiano **Testi/Bibliografia** • M. Abate, F. Tovena, ***Curve e Superfici***. Springer. • M. P. Do Carmo, ***Differential Geometry of Curves and Surfaces***. Prentice Hall. • V. Checcucci, A. Tognoli, E. Vesentini, ***Lezioni di Topologia Generale***. Feltrinelli.
5	**Metodi di accertamento**	L'esame consiste in una prova scritta ed in una prova orale a cui si accede dopo aver ottenuto la su fficienza alla prova scritta.