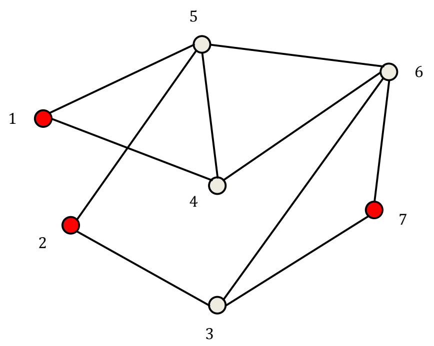
OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA **prova scritta del 23 aprile 2014**

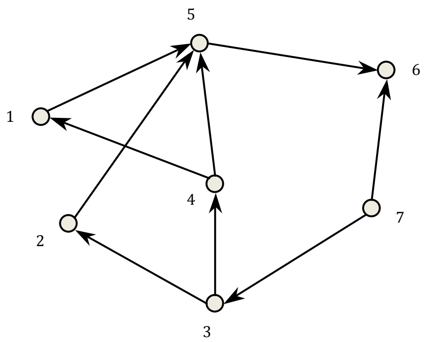


1. Dire se il grafo qui a destra ammette o no un insieme di vertici K che sia allo stesso tempo stabile e dominante, e in caso affermativo indicarne uno.

2. Costruire un insieme di disequazioni lineari fra 7 variabili le cui soluzioni in $\{0, 1\}^7$ corrispondono agli insiemi stabili dominanti del grafo a destra.

Stabile:	*Dominante:*
$x_1 + x_4 + x_5 \leq 1$	$x_1 + x_4 + x_5 \geq 1$
$x_4 + x_5 + x_6 \leq 1$	$x_2 + x_3 + x_5 \geq 1$
$x_3 + x_6 + x_7 \leq 1$	$x_3 + x_2 + x_6 + x_7 \geq 1$
$x_2 + x_5 \leq 1$	$x_4 + x_1 + x_5 + x_6 \geq 1$
$x_2 + x_3 \leq 1$	$x_5 + x_1 + x_4 + x_6 \geq 1$
	$x_6 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 1$
	$x_7 + x_3 + x_6 \geq 1$

Per lo stabile si sono usate le diseguaglianze corrispondenti alle clique massimali.
In rosso le disequazioni ridondanti.



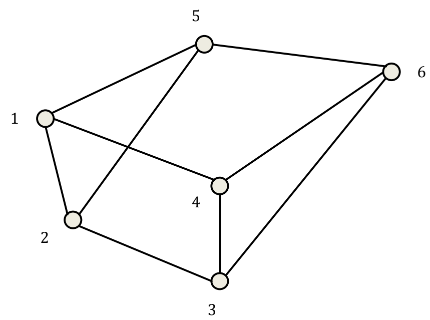
3. Mostrare i passi di un algoritmo che decide se il grafo di sinistra ammette un ordinamento topologico, e in caso affermativo ne indica uno.

Al generico passo scelgo un nodo u di G con grado di ingresso 0: se non esiste, allora G contiene un circuito; altrimenti pongo $\rho(u)$:= ordine del passo corrente, $G := G - u$ e itero fino a esaurimento dei nodi.
L'algoritmo restituisce il seguente ordinamento:

$$\rho(7) = 1,\ \rho(3) = 2,\ \rho(2) = 3,\ \rho(4) = 4,\ \rho(1) = 5,\ \rho(5) = 6,\ \rho(6) = 7$$

4. Disegnare un grafo cubico connesso G sui vertici 1, 2, 3, 4, 5, 6 e dire se è o no euleriano/hamiltoniano.

Quello rappresentato a destra è un grafo cubico connesso di 6 nodi. Nessun grafo cubico può essere euleriano perché esiste un nodo di grado dispari (tutti i nodi hanno in effetti grado 3). Quello in figura è un grafo cubico hamiltoniano: un circuito hamiltoniano è 1, 2, 3, 4, 6, 5.



5. Sia G un grafo completo con $3k$ nodi. Si vuole coprire ogni nodo di G con uno e un solo triangolo formato da archi di G. Associare a ciascun arco una variabile, e assoggettare queste variabili a un sistema di disequazioni lineari le cui soluzioni 0-1 corrispondono alle coperture possibili.

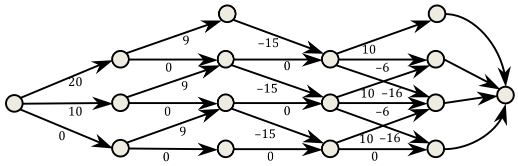
Le disequazioni sono di due tipi: per ogni $u \in V(G)$, $\sum_{uv \in E} x_{uv} = 2$ (ogni nodo è coperto da 2 archi)

per ogni terna di archi, $x_{uv} + x_{vw} - x_{uw} \leq 1$

6. Una ditta di import-export può acquistare partite di un certo prodotto in lotti interi. Nel giorno t può acquistare fino a q_t lotti a un costo unitario c_t, e venderne fino a s_t a un prezzo unitario p_t. Servirsi di un grafo diretto aciclico G i cui nodi rappresentano il numero di lotti in magazzino nel giorno t (stato del sistema) e i cui archi (transizioni) rappresentano le operazioni di compravendita effettuate, e formulare come cammino minimo su G il problema di pianificare acquisti e vendite in un arco di n giorni massimizzando il profitto netto. Risolvere il problema per n = 4 giorni, ipotizzando il magazzino inizialmente vuoto e i valori dei parametri come in tabella.

t	q_t	c_t	s_t	p_t
1	2	10	0	-
2	1	9	0	-
3	0	-	1	15
4	1	10	1	16

Identifichiamo i nodi di G con lo stato del magazzino, vale a dire il numero di lotti in esso presenti, al tempo t, per t = 1, …, 4; aggiungiamo inoltre un nodo terminale corrispondente alla fine della pianificazione. Una transizione da uno stato al tempo t a uno al tempo t + 1 è rappresentata da un arco che collega stati raggiungibili in accordo alle condizioni espressi in tabella. Gli archi sono pesati con pesi positivi (acquisti) o negativi (vendite). Una soluzione ottima corrisponde perciò a un cammino di peso minimo dallo stato iniziale a quello finale.

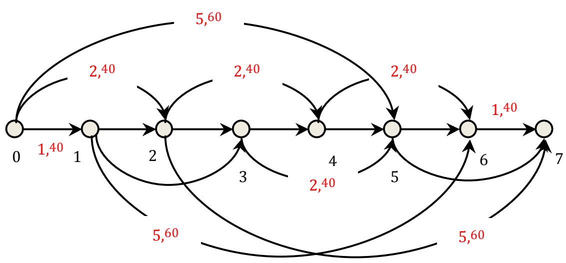


7. Una massaia vuole farsi una bella scorta di varechina: almeno 7 litri. Il supermercato offre flaconi da 5 litri a 5,60€, 2 litri a 2,40€ e 1 litro a 1,40€. Mostratele come calcolare la composizione ottima disegnando un grafo diretto aciclico e scrivendo una semplice formula di ricorrenza.

Il problema consiste nella copertura al costo minimo di un requisito (7 litri) tramite elementi (flaconi) di pesi (capacità) e costi diversi:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5{,}60x_1 + 2{,}40x_2 + 1{,}40x_3 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ interi} \end{aligned}$$

Il grafo $G = (V, E)$ si costruisce associando ciascun nodo allo stato del calcolo, vale a dire alla quantità coperta con gli acquisti fino a quel punto. I pesi degli archi, in rosso, rappresentano i costi sostenuti (non tutti rappresentati in figura per maggior chiarezza).



La formula di ricorrenza da applicare è $c_k = \min\{c_j + c_{jk}: jk \in E\}$, dove c_{jk} rappresenta il peso dell'arco $jk \in E$. Si tratta di calcolare c_7 con la condizione iniziale c_0 = 0. Si noti che non tutti gli archi che terminano nel nodo 7 sono presenti, ma solo quelli più convenienti.