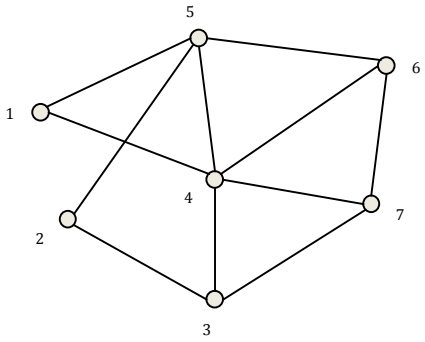
OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA **GRUPPO A**
prova scritta del 12 maggio 2015

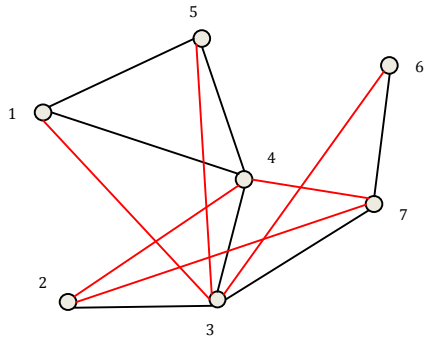
1. Dire se il grafo qui a destra ammette o no un insieme trasversale T che sia anche una clique, e in caso affermativo indicarne uno.



Il grafo non contiene clique trasversali.

2. Costruire un insieme di disequazioni lineari fra 7 variabili le cui soluzioni in $\{0, 1\}^7$ corrispondono alle clique trasversali del grafo a destra.

$x_1 + x_2 \leq 1$ $x_1 + x_3 \leq 1$ $x_1 + x_6 \leq 1$ $x_1 + x_7 \leq 1$ $x_2 + x_4 \leq 1$ $x_2 + x_6 \leq 1$
$x_2 + x_7 \leq 1$ $x_3 + x_5 \leq 1$ $x_3 + x_6 \leq 1$ $x_5 + x_7 \leq 1$ $x_1 + x_4 \geq 1$ $x_1 + x_5 \geq 1$
$x_2 + x_3 \geq 1$ $x_2 + x_5 \geq 1$ $x_3 + x_4 \geq 1$ $x_3 + x_7 \geq 1$ $x_4 + x_5 \geq 1$ $x_4 + x_6 \geq 1$
$x_4 + x_7 \geq 1$ $x_5 + x_6 \geq 1$ $x_6 + x_7 \geq 1$



3. Un insieme k-dominante è un insieme D di nodi di un grafo G tale che ogni nodo di G o appartiene a D oppure è a distanza $\leq k$ da un nodo di D (per distanza fra due nodi si intende il minimo numero di archi che portano dall'uno all'altro). Indicare un insieme 2-dominante minimale nel grafo G di sinistra. Costruire un insieme di disequazioni lineari fra 7 variabili le cui soluzioni in $\{0, 1\}^7$ corrispondono agli insiemi 2-dominanti del grafo a sinistra.

Collegando fra loro i nodi a distanza 2 si ottiene il grafo G' di figura; un insieme dominante D' in G' è un insieme 2-dominante D di G, e viceversa.

4. Un insieme k-stabile è un insieme S di nodi di un grafo G tale che ogni coppia di nodi in S si trova a distanza reciproca $> k$. Che relazione sussiste fra un insieme k-stabile massimale e un insieme k-dominante minimale?

Procedendo come sopra, un insieme stabile di G' è 2-stabile in G. L'insieme $\{3\}$ è stabile massimale e dominante minimale in G'. L'insieme $\{4, 7\}$ è dominante minimale ma non è stabile in G'. In generale si può dire che se S è stabile e D dominante in G', allora ciascun nodo di $S - D$ dev'essere dominato da almeno un nodo di $D - S$.

5. Distinguete vero e falso.

a) Sia $(U, \mathfrak{I})$ con $\mathfrak{I} \subseteq 2^U$ non subclusiva. Se i suoi massimali hanno tutti la stessa cardinalità, allora $\mathfrak{I}$ gode della proprietà di scambio.

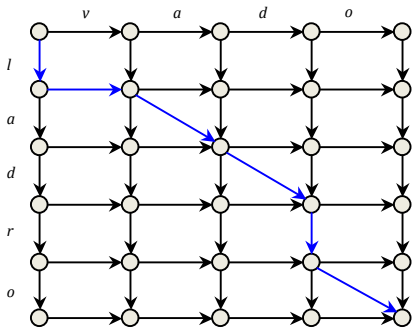
b) Sia U un insieme di archi di un grafo e $\mathfrak{I}$ formata dagli insiemi di archi di U che sono alberi ricoprenti. Allora $(U, \mathfrak{I})$ è un matroide.

c) Sia U un insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ e $\mathfrak{I}$ formata da sottoinsiemi di U linearmente indipendenti con $\leq k$ elementi: $(U, \mathfrak{I})$ è un matroide.

d) Se una matrice è totalmente unimodulare, allora ogni colonna ha al più due elementi diversi da 0.

vero	*falso*
vero	*falso*
vero	*falso*
vero	*falso*

6. Siano s, t due stringhe composte con i caratteri dell'alfabeto. Diciamo che t è una superstringa di s se t riproduce i caratteri di s nel medesimo ordine di s, eventualmente inframmezzandoli con caratteri arbitrari. Ad esempio, *vladimiro* è una superstringa di *vladimiro*, *vado* e di *ladro*, ma non lo è di *lardo*. Date due stringhe s, s', una superstringa minima di s, s' è una stringa t che è superstringa di entrambe e ha minimo numero di caratteri. Associamo a s = *vado* e s' = *ladro* il grafo G qui a destra. A cosa corrisponde una superstringa di s, s' in termini di elementi (nodi o archi) di G? Usando G si può calcolare la superstringa minima con un algoritmo di programmazione dinamica? Se sì, come?



$G = (V, E)$ è diretto aciclico e quindi ammette un ordinamento topologico, vale a dire i suoi nodi possono numerarsi da 1 a 30 in modo che qualsiasi arco (i, j) del grafo ha $i < j$. La superstringa più breve corrisponde evidentemente a un cammino di lunghezza minima fra il nodo 1 e il nodo 30. Tale cammino si può immediatamente calcolare con la formula di ricorrenza

$$c_j = 1 + \min\{c_i : (i, j) \in E\}$$

Si ottiene facilmente $c_{30} = 6$. Una possibile soluzione è $t = lvadro$. Una soluzione equivalente è $t = vladro$.