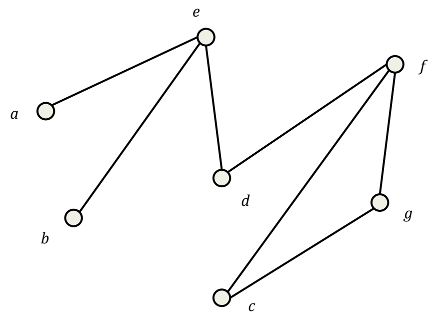
OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA **GRUPPO B**

Soluzioni della prova scritta del 24 giugno 2015

1. Formulate come PL 0-1 il problema di determinare in un grafo il più piccolo insieme di nodi che sia dominante. Eliminate quindi dalla formulazione scritta il vincolo di interezza, scrivete il problema duale e reinserite il vincolo di interezza. Quale problema avete così formulato? Che relazione sussiste fra gli ottimi dei due problemi? Verificatela sul grafo a destra.



Le variabili di decisione sono del tipo $x_u = 1$ se il nodo u inserito nell'insieme dominante cercato, 0 altrimenti. Nel caso del grafo G il problema si formula:

min $\quad x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g$

$x_a + x_e \geq 1 \qquad x_b + x_e \geq 1 \qquad x_c + x_f + x_g \geq 1 \qquad x_d + x_e + x_f \geq 1$

$x_e + x_a + x_b + x_d \geq 1 \qquad x_f + x_c + x_d + x_g \geq 1 \qquad x_g + x_c + x_f \geq 1$

$x_u \in \{0, 1\}$ per ogni $u \in V'$

Eseguendo le operazioni richieste si ottiene il problema:

max $\quad y_a + y_b + y_c + x_d + x_e + x_f + x_g$

$y_a + y_e \leq 1 \qquad y_b + y_e \leq 1 \qquad y_c + y_f + x_g \leq 1 \qquad y_d + y_e + y_f \leq 1$

$y_e + y_a + y_b + y_d \leq 1 \qquad y_f + y_c + y_d + y_g \leq 1 \qquad y_g + y_c + y_f \leq 1$

$x_j \in \{0, 1\}$ per ogni clique Q_j di G'

Come il primo, anche il secondo problema contiene un vincolo per ogni nodo u: il vincolo richiede in particolare di non prendere più di un nodo fra u e quelli del suo intorno. Siccome i nodi dell'intorno di u si trovano fra loro a distanza ≤ 2, il problema consiste quindi nel determinare il massimo numero di nodi che formano un insieme 2-stabile nel grafo G. Per quanto riguarda la relazione tra i due problemi, per la dualità debole l'ottimo del primo ha sempre valore minore $\leq$ dell'ottimo del secondo, dal che si deduce che in un generico grafo G un insieme dominante non può avere meno elementi di un insieme 2-stabile. Come si vede, nel grafo di figura il più piccolo insieme dominante è $D = \{e, f\}$; il più grande insieme 2-stabile è invece, ad esempio, $S = \{a, c\}$.

2. Il penitenziario di Sing Sing ospita la Banda Bassotti. Come sanno gli appassionati di vecchi fumetti, i Bassotti principali sono otto: sei di loro hanno matricola 176-671, 176-167, … (insomma, le permutazioni di 167), poi c'è Nonno Bassotto e Supersensibile 666. Ma lasciamo stare: se ne parliamo qui è perché i Bassotti sono molto litigiosi. Il direttore del carcere li ha fatti sorvegliare e ha sintetizzato le inimicizie reciproche in un grafo simmetrico di 8 nodi: due nodi adiacenti corrispondono a due Bassotti che sono venuti alle mani. Il direttore vuole dividere gli otto reclusi in due celle da quattro letti ciascuna, minimizzando il numero di coppie nemiche all'interno della stessa cella. Formulate il problema come programmazione lineare 0-1.

Si chiede di dividere i nodi del grafo in due sottoinsiemi da 4 nodi ciascuno, con l'obiettivo di massimizzare il numero di archi che hanno entrambi gli estremi in uno dei due sottoinsiemi (e corrispondono quindi a coppie di detenuti litigiosi). Poiché il numero totale degli archi è una costante, e se un arco non è contenuto in uno dei due sottoinsiemi vuol dire che ha un estremo in uno e l'altro estremo nell'altro, l'obiettivo corrisponde evidentemente a minimizzare il numero di archi tagliati. Detta x_u una variabile 0-1 associata al bassotto u, si assuma $x_u = 1$ se il bassotto è assegnato alla sezione A, 0 altrimenti. Per ogni arco uv, sia inoltre $x_{uv} = 1$ se i bassotti corrispondenti a u e v sono in celle diverse, $x_{uv} = 0$ altrimenti. Il problema si scrive

min $\quad \sum_{uv \in E} x_{uv}$

$\sum_{u \in V} x_u = 10$

$x_u - x_v \leq x_{uv}$ per ogni arco $uv \in E$

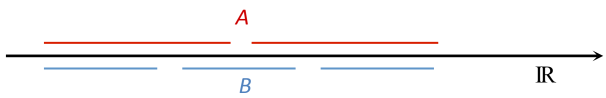
$x_v - x_u \leq x_{uv}$ per ogni arco $uv \in E$

$x_u, x_{uv} \in \{0, 1\}$ per ogni nodo $u \in V$ e ogni arco $uv \in E$

3. Distinguete vero e falso.

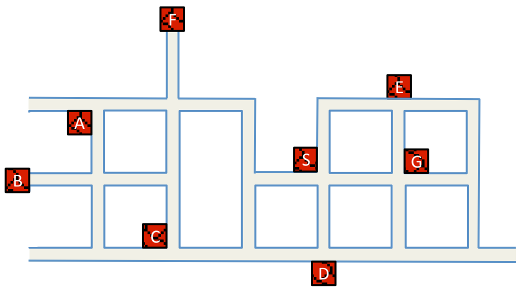
I parte	*a*)	In un grafo bipartito si può calcolare un edge-cover di peso minimo in tempo polinomiale. La matrice dei vincoli è totalmente unimodulare.	*vero*	*falso*
	b)	Un grafo simmetrico *G* che ammette un edge-cover non ha nodi isolati. Se vi fosse un nodo isolato, G non ammetterebbe edge-cover.	*vero*	*falso*
	c)	In un grafo simmetrico *G* esiste un insieme trasversale vuoto se e solo se *G* è privo di archi. Se *G* ha un arco, uno dei suoi estremi è nel trasversale.	*vero*	*falso*
	d)	La matrice di incidenza nodi-archi di un grafo simmetrico *G* è totalmente unimodulare se e solo se *G* è bipartito. Matrice TU = niente cicli dispari.	*vero*	*falso*
II parte	*e*)	Gli insiemi degli archi di un grafo intervallo che non formano cicli definiscono un matroide. Un matroide grafico non dipende dal grafo.	*vero*	*falso*
	f)	Dato un insieme *U* di intervalli di $\mathbb{R}$, sia $\Im$ formata dagli insiemi di intervalli che hanno intersezione vuota: $(U, \Im)$ definisce un matroide.	*vero*	*falso*
	g)	Applicando branch-and-bound a un problema di massimo, se il lower bound a un nodo è $\leq$ dell'ottimo corrente, il nodo si può chiudere.	*vero*	*falso*
	h)	Se un grafo orientato contiene un circuito dispari, allora non ammette un ordinamento topologico.	*vero*	*falso*

f) La figura mostra due insiemi di intervalli che non si intersecano: *A* ne contiene 2, *B* ne contiene 3, ma ogni intervallo in *B* interseca almeno un intervallo in *B*.



g) In un problema di massimo l'ottimo corrente è sempre $\geq$ del lower bound: il confronto si deve fare con l'upper bound, non con il lower bound.

4. Uno scuolabus deve passare per tutte le case degli scolari iscritti al servizio. La piantina del paese è riportata in figura. Immaginando che gli isolati quadrati abbiano lato unitario e non vi siano sensi vietati, deducetene la matrice delle distanze fra le case degli scolari (A, B, C, …) e la scuola (S). Determinate poi con il metodo di Christofides una soluzione euristica che tenti di minimizzare la distanza percorsa dallo scuolabus. Le condizioni per ottenere un risultato approssimato sono soddisfatte? Se sì, qual è il grado di approssimazione che si raggiunge nel caso peggiore?

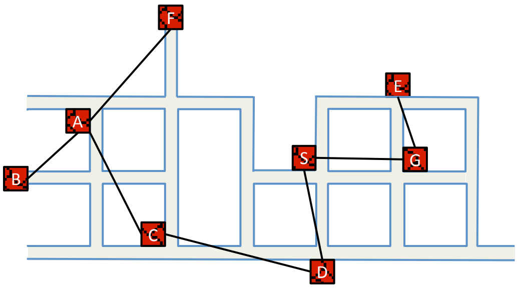


La matrice che si può dedurre dal disegno è rappresentata qui sotto:

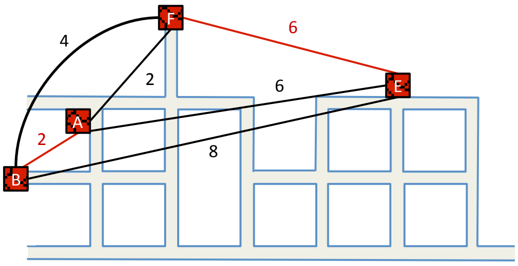
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*S*
Antonella	-	2	3	5	6	2	5	4
Beniamino		-	3	5	8	4	7	6
Carletto			-	2	5	3	4	3
Dino				-	3	5	2	1
Elisabetta					-	6	1	2
Francescuzza						-	5	4
Gigetto							-	1

Il problema, ovviamente, è metrico: è dunque soddisfatta la diseguaglianza triangolare e l'algoritmo di Christofides restituisce una soluzione che dista al massimo il 50% dall'ottimo.

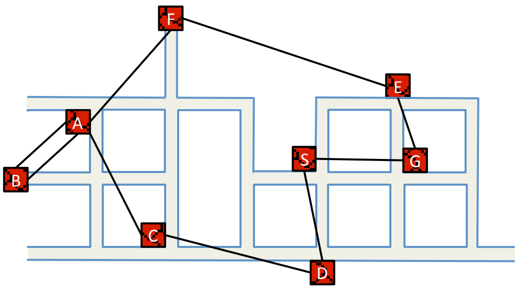
- Si ricava un albero ricoprente di peso minimo: gli elementi della matrice riportati in nero corrispondono a tratti dell'albero, quelli in rosso ai tratti che l'algoritmo greedy è obbligato a scartare perché formano cicli con tratti scelti in precedenza. L'albero è riportato nella figura che segue.



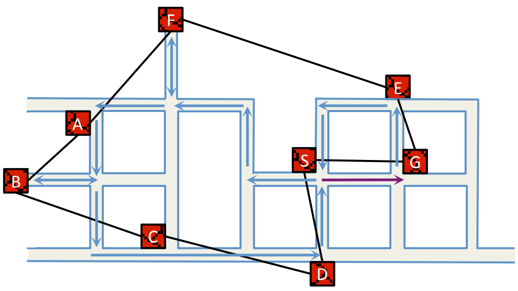
- Si determina un matching di peso minimo fra i nodi dell'albero che hanno grado dispari: nel caso mostrato, A, B, E, F. Il matching minimo è riportato in figura seguente con tratti di colore rosso.



- Unendo matching e albero si ottiene un circuito euleriano.



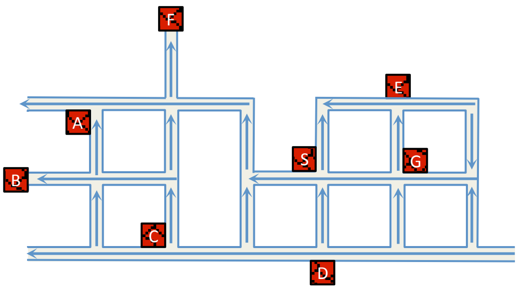
- Si determina una passeggiata di Eulero (ad esempio, SGEFABACDS); operando le abbreviazioni necessarie, si perviene infine a un circuito hamiltoniano H. Il circuito è indicato simbolicamente dai tratti neri, le frecce sulla mappa ne rappresentano l'implementazione (in viola il primo tratto). Il circuito copre una distanza complessiva $d(H) = 18$.

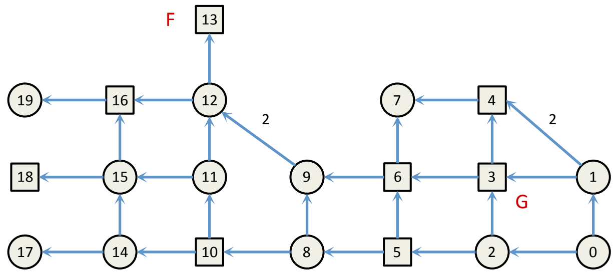


La matrice rappresenta una metrica, cioè una funzione simmetrica che gode della diseguaglianza triangolare. Per un noto teorema dunque la soluzione trovata non dista da quella ottima più del 50% del valore di quest'ultima. Per verificarlo, osserviamo che il costo dell'albero ricoprente, $d(T^*) = 12$, rappresenta una limitazione inferiore all'ottimo: difatti, $[d(H) - d(T^*)]/d(T^*) = 6/12 = 50\%$.

5. Immaginate la piantina della figura precedente con sensi unici da destra a sinistra e dal basso in alto. Sviluppate il calcolo di due formule di ricorrenza che forniscano il percorso minimo e quello massimo da casa di G a casa di F.

La figura di sinistra mostra i sensi unici. Da questi è possibile dedurre il grafo orientato di destra.





Le etichette dei nodi del grafo descrivono un ordinamento topologico, ottenuto numerando e rimuovendo progressivamente dal grafo i nodi privi di predecessori: il punto G ha etichetta 3. Gli archi hanno tutti lunghezza $d_{ij} = 1$, tranne i due indicati (di lunghezza $d_{ij} = 2$). Le formule di ricorrenza per il calcolo di un (B, E)-cammino minimo e massimo sono rispettivamente:

$$c_k = \min_{hk \in E}\{c_h + d_{hk}\} \qquad\qquad C_k = \max_{hk \in E}\{C_h + d_{hk}\}$$

Le condizioni iniziali per il cammino minimo si scrivono:

$c_3 = 0$ (definisce la distanza del punto G da se stesso)

$c_i = \infty$ (definiscono la distanza dal punto G dei punti etichettati con $i = 0, 1, 2$; questi punti sono irraggiungibili da G perché hanno etichette inferiori a quella di G)

Applicando la formula per il calcolo del cammino minimo si ha in successione:

$$c_4 = \min\{c_1 + d_{14}, c_3 + d_{34}\} = \min\{\infty + 2, 0 + 1\} = 1$$
$$c_5 = c_2 + d_{25} = \infty + 1 = \infty$$
$$c_6 = \min\{c_3 + d_{36}, c_5 + d_{56}\} = \min\{0 + 1, \infty + 1\} = 1$$
$$c_7 = \min\{c_4 + d_{47}, c_6 + d_{67}\} = \min\{1 + 1, 1 + 1\} = 2$$
$$c_8 = c_5 + c_{58} = \infty + 1 = \infty$$
$$c_9 = \min\{c_6 + d_{69}, c_8 + d_{89}\} = \min\{1 + 1, \infty + 1\} = 2$$
$$c_{10} = c_8 + d_{8,10} = \infty + 1 = \infty$$
$$c_{11} = c_{10} + d_{10,11} = \infty + 1 = \infty$$
$$c_{12} = \min\{c_9 + d_{9,12}, c_{11} + d_{11,12}\} = \min\{2 + 2, \infty + 1\} = 4$$
$$c_{13} = c_{12} + c_{12,13} = 4 + 1 = 5$$

Come si vede, oltre a 0, 1, 2 anche 5, 8, 10, 11 non sono raggiungibili da G. Il punto F è in effetti etichettato 13, dunque è fra quelli raggiungibili.

Osserviamo che la convenzione di indicare con ∞ le distanze iniziali dei nodi 0, 1, 2 dal punto G non consente di applicare la formula per il calcolo del percorso più lungo. Per far funzionare l'algoritmo in questo caso, bisogna scegliere il valore convenzionale $-\infty$. La formula fornisce:

$$C_4 = \max\{C_1 + d_{14}, C_3 + d_{34}\} = \max\{-\infty + 2, 0 + 1\} = 1$$
$$C_5 = c_2 + d_{25} = -\infty + 1 = -\infty$$
$$C_6 = \max\{C_3 + d_{36}, C_5 + d_{56}\} = \max\{0 + 1, -\infty + 1\} = 1$$
$$C_7 = \max\{C_4 + d_{47}, C_6 + d_{67}\} = \max\{1 + 1, 1 + 1\} = 2$$
$$C_8 = C_5 + d_{58} = -\infty + 1 = -\infty$$
$$C_9 = \max\{C_6 + d_{69}, C_8 + d_{89}\} = \max\{1 + 1, -\infty + 1\} = 2$$
$$C_{10} = C_8 + d_{8,10} = -\infty + 1 = -\infty$$
$$C_{11} = C_{10} + d_{10,11} = -\infty + 1 = -\infty$$
$$C_{12} = \max\{C_9 + d_{9,12}, C_{11} + d_{11,12}\} = \max\{2 + 2, -\infty + 1\} = 4$$
$$C_{13} = C_{12} + d_{12,13} = 4 + 1 = 5$$

Le due formule danno dunque il medesimo risultato.