OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA
Prova scritta del 17 febbraio 2016

1. Rispondete alle domande seguenti distinguendo le risposte vere da quelle false:

Gruppo A

a) L'involucro convesso di un insieme finito di vettori 0-1 non contiene nessuno di questi vettori come punto interno.

b) La matrice d'incidenza nodi-archi di un ciclo è sempre totalmente unimodulare.

c) Il numero delle clique di un grafo bipartito con n nodi è un polinomio in n.

d) Se la matrice d'incidenza nodi-archi di un grafo G è totalmente unimodulare, allora G è bipartito.

vero	*falso*
vero	*falso*
vero	*falso*
vero	*falso*

Gruppo B

a) L'involucro convesso di un insieme finite di vettori interi non contiene nessuno di questi vettori come punto interno.

b) La matrice d'incidenza nodi-archi di un grafo intervallo è sempre totalmente unimodulare

c) Il numero di insiemi stabili di un grafo bipartito con n nodi è un polinomio in n.

d) Supponete G bipartito. Allora la matrice di incidenza nodi-clique di G è totalmente unimodulare.

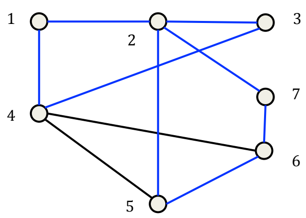
vero	*falso*
vero	*falso*
vero	*falso*
vero	*falso*

Gruppo A

La frase (*a*) è vera per un noto teorema. La frase (*b*) è falsa: se il ciclo è dispari la sua matrice di incidenza nodi-archi ha determinante in modulo pari a 2. La frase (*c*) è vera perché le clique di un grafo bipartito sono i suoi archi e i suoi nodi, e dunque sono $O(n^2)$. Anche la frase (*d*) è vera: se G non fosse bipartito, allora conterrebbe un ciclo dispari e saremmo nella situazione della frase (*b*).

Gruppo B

La frase (*a*) è falsa: un controesempio è dato dai vettori (0, 0), (1, 1) (2, 2), il cui involucro convesso è il segmento di estremi (0, 0), (2, 2), che contiene al suo interno (1, 1). Anche la frase (*b*) è falsa: K_3 è un grafo intervallo ed è anche un ciclo dispari. E anche la frase (*c*) è falsa: gli insiemi stabili di un grafo bipartito contengono tutti i sottoinsiemi di nodi di uno dei suoi stabili massimali, e questi sono $O(2^n)$. La frase (*d*) invece è vera: infatti le clique di G sono gli archi di G.



2. (Gruppo A) Nel grafo G di sinistra, trovate il più piccolo insieme R di archi tale che ogni altro arco di G è adiacente ad almeno un arco di R.

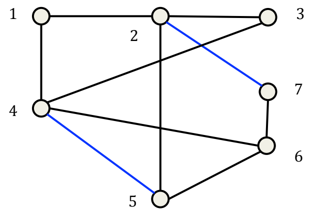
Il più grande sottografo euleriano è quello corrispondente agli archi in azzurro.

3. (Gruppo A) Descrivete un sistema di disequazioni lineari le cui soluzioni 0-1 sono i vettori caratteristici degli insiemi R di archi descritti nel Problema 2.

Il sistema di disequazioni è definito per variabili x_{uv} associate agli archi del grafo G e x_u associate ai suoi nodi. La generica variabile x_{uv} varrà 1 se l'arco uv appartiene a un sottografo euleriano, 0 altrimenti. La generica variabile $x_u \geq 0$ sarà invece intera, e pari alla metà del grado del nodo u nel sottografo. Ricordiamo che i nodi di un grafo euleriano hanno tutti grado pari. Le disequazioni hanno quindi la forma generale

$$\sum_{uv \in S(u)} x_{uv} = 2x_u \quad \text{per ogni nodo } u \text{ di } G$$

dove abbiamo indicato con $S(u)$ l'insieme degli archi di G che incidono sul nodo u. Notiamo che in generale non è detto che i vettori 0-1 che soddisfano queste disequazioni corrispondano a un sottografo connesso.



2. (Gruppo B) Nel grafo G di sinistra, trovate il più piccolo insieme R di archi tale che ogni altro arco di G è adiacente ad almeno un arco di R.

L'insieme cercato è rappresentato in colore azzurro.

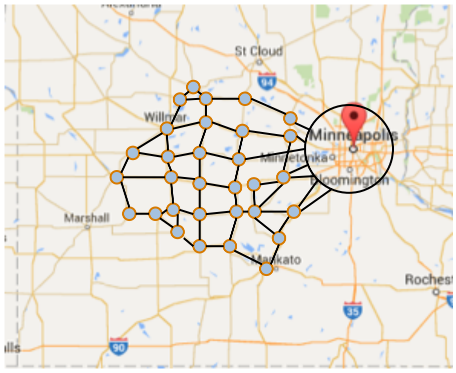
3. Descrivete un sistema di disequazioni lineari le cui soluzioni 0-1 sono i vettori caratteristici degli insiemi R di archi descritti nel Problema 2.

Le variabili sono del tipo $x_{uv} = 1$ se $uv \in R$ e 0 altrimenti. L'insieme R è un insieme dominante nel line-graph di G. I vincoli dicono che o l'arco $uv \in R$, oppure è adiacente a un arco di R:

$$x_{uv} + \sum_{ijv \in A(uv)} x_{ij} \geq 1 \qquad \text{per ogni arco } uv \text{ di } G$$

dove abbiamo indicato con $A(uv)$ l'insieme degli archi che hanno un solo estremo in comune con uv.

4. La mappa a destra mostra una rete stradale G con evidenziati gli incroci. Stiamo cercando di bloccare una banda di criminali che sappiamo costretta a lasciare Minneapolis diretta a Willmar, e dobbiamo mettere dei posti di blocco sulle strade (strade, non incroci). Ma siamo troppo pochi! Aiutateci a sconfiggere le forze del male trovando un modo per minimizzare il numero di poliziotti che dobbiamo impiegare in questo dannato compito. Una formulazione di programmazione lineare 0-1 sarebbe bene accetta…



Associamo a Minneapolis il nodo s e a Willmar il nodo t. Il problema consiste nel determinare il più piccolo insieme di archi la cui rimozione separa s da t. In questo caso il problema ha soluzione ovvia: tale insieme è formato dai tre archi incidenti su t. La sua formulazione generale è quella di un problema di taglio minimo, dove per taglio s'intende un insieme T minimale che intercetta tutti i percorsi di estremi s e t. Sia $x_{uv} = 1$ se uv appartiene a un taglio T di G, 0 altrimenti. Indicato con E l'insieme degli archi di G, la definizione data di T permette di scrivere il problema come segue

$$\min \sum_{uv \in E} x_{uv}$$

$$\sum_{uv \in P} x_{uv} \geq 1 \qquad \text{per ogni percorso } P \subseteq E \text{ con estremi } s \text{ e } t$$

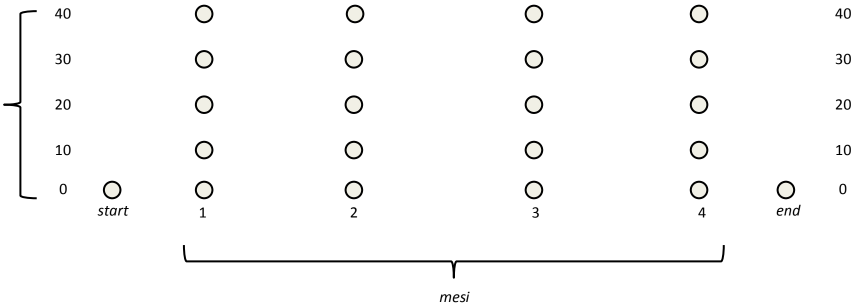
$$x_{uv} \in \{0, 1\} \qquad \text{per ogni } uv \in E$$

Si noti che l'obiettivo del problema assicura che un taglio ottimo è un insieme minimale.

5. Una società che commercia in metalli compra e rivende alluminio, e possiede un magazzino per gestirne le scorte. La società vuole sviluppare un piano di acquisti di 4 mesi per soddisfare una domanda mensile nota. Il magazzino, al momento, è vuoto e può contenere fino a 40 unità di alluminio. Un acquisto è un lotto singolo che può contenere 10 oppure 30 unità, a prezzi diversi. Inoltre i prezzi variano da mese a mese, e così pure i tassi d'interesse. Questi ultimi sono importanti per calcolare i costi d'immobilizzo: infatti, se il livello del magazzino al mese t è di l unità e al mese $t + 1$ di l' unità, allora il costo d'immobilizzo sarà $[(l' - l)/2 + l]u_t i_t$, dove u_t è il valore di un'unità di alluminio e i_t è il tasso d'interesse nel mese t. La società vuole terminare il periodo di pianificazione col magazzino vuoto.
Descrivete una formula di programmazione dinamica per minimizzare il costo totale (acquisto + immobilizzo) sostenuto durante i 4 mesi pianificati (*suggerimento*: usate un grafo diretto aciclico con nodi corrispondenti alle coppie (t, l)). Definite gli archi (= transizioni) e calcolate i costi a partire dalla tabella sotto riportata

	mese	I	II	III	IV
	valore x tasso d'interesse $u_t i_t$	0.9	1.5	0.8	1.0
	domanda	10	20	10	20
prezzo di	*10 unità*	100	140	90	100
acquisto	*30 unità*	240	360	240	270

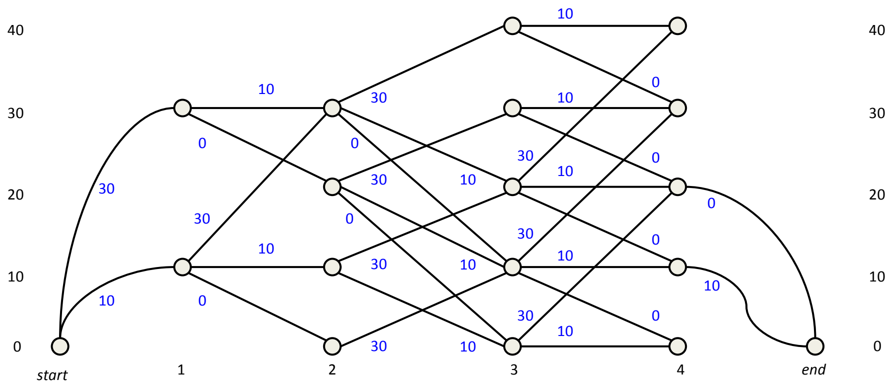
In linea di principio possiamo associare un nodo a ogni mese e a ogni possibile livello di scorta del magazzino. I livelli partono da 0 e vanno di 10 in 10 fino a 40. I nodi del grafo sono quindi quelli di figura:



A questi abbiamo aggiunto un nodo "inizio" e un nodo "fine" pianificazione. Il grafo viene completato con l'insieme E degli archi che corrispondono a transizioni ammissibili da un livello al mese t a un livello al mese successivo. Una transizione è ammissibile se:

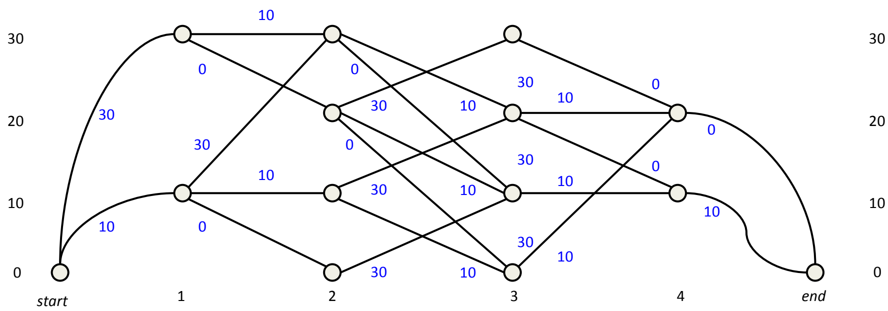
1) è ottenuta tramite l'acquisto di un lotto di dimensione esistente (nel caso del problema, 0, 10 o 30)
2) scala la quantità acquistata della domanda soddisfatta
3) rispetta i vincoli di soglia (livelli ≥ 0) e di capacità (livelli ≤ 40).

Le transizioni ammissibili sono riportate nella figura seguente. Gli archi s'intendono orientati da sinistra verso destra, e a ciascuno di essi è associata (in azzurro) la decisione di acquisto (0, 10, 30) che realizza la transizione corrispondente.



Come si vede, alcuni dei nodi non sono stati riportati perché irraggiungibili: ad esempio il nodo (1, 40) non può essere raggiunto per nessun acquisto, visto che gli acquisti possibili sono di 0, 10 o 30 unità. Inoltre non è necessario indicare tutte le transizioni ammissibili, ma solo quelle che appartengono a un cammino dal nodo iniziale a quello finale. Ad esempio, la transizione che porta dal nodo iniziale al nodo (1, 0) è realizzabile con acquisto nullo, ma non consentirebbe di procedere in quanto nel mese 1 occorre soddisfare una domanda di 10 unità e quindi il magazzino non potrebbe essere vuoto.

In questo senso, il grafo può essere ulteriormente ridotto come da figura seguente:



L'input del problema può ora essere completato definendo i costi associati agli archi. Per questi si applica la formula:

$$c_{tkl} = \text{(costo di acquisto nel mese } t \text{ per passare da livello } k \text{ a } l\text{)} + \text{(costo di giacenza nel mese } t\text{)}$$

La formula di programmazione dinamica si scrive:

$$c_{t+1,l} = \min\{c_{tk} + c_{tkl} : ((t, k), (t+1, l) \in E\}$$