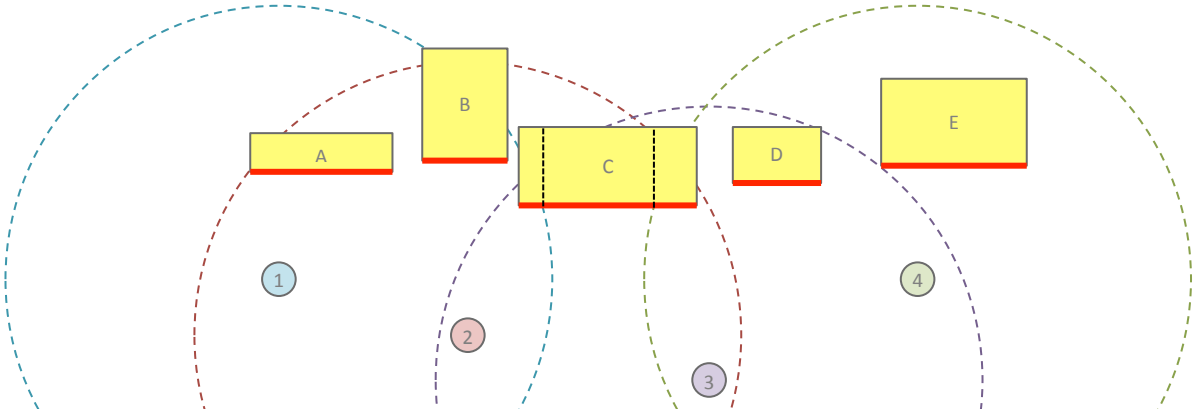
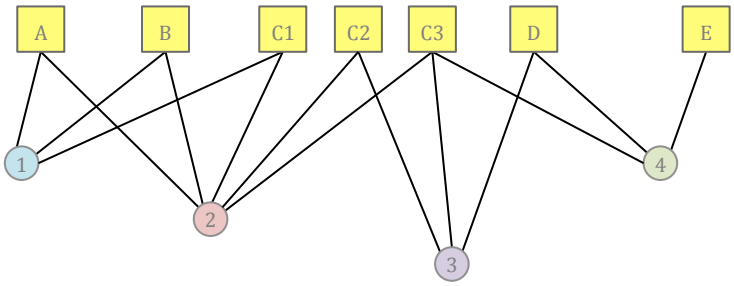
OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA soluzione prova scritta 8 luglio 2014 – Gruppo A

1. **Guerriglia urbana.** Il diagramma riporta una situazione tattica nella quale quattro postazioni militari (indicate con i numeri da 1 a 4) controllano un fronte formato da cinque edifici (indicati con le lettere da A a E). Le circonferenze tratteggiate rappresentano la gittata massima di ciascuna postazione. L'ordine è di tenere sotto tiro le facciate dei cinque edifici (rappresentate dai lati orizzontali inferiori, indicati nel disegno con un tratto più grosso). Una postazione può tenere sotto tiro i tratti di facciata contenuti nel raggio di propria competenza. Il controllo di una stessa facciata può essere condiviso da più postazioni. Attivare il minimo numero di postazioni sufficiente a controllare tutti gli edifici è evidentemente un problema ottimizzazione combinatoria su un certo grafo. Quale grafo e quale problema? Formularlo come programmazione lineare 0-1 (interessa la formulazione, *non la soluzione*).



Prendiamo in esame il segmento S che rappresenta la facciata di un generico edificio. Per ogni punto $y \in F$ esiste ed è unico l'insieme $P(y)$ delle postazioni p che lo tengono sotto tiro. Facendo variare y in S in modo da mantenere invariato $P(y)$, si ottiene un segmento S' contenuto in S. Il segmento S risulta quindi partizionato in segmenti S', S'', … ciascuno corrispondente a un sottoinsieme di postazioni differente. Nel caso in esame, l'unico segmento partizionato è quello corrispondente alla facciata dell'edificio C (vedi figura).
In generale, i nodi del grafo corrispondono a due insiemi, entrambi stabili: P, associato alle postazioni; F, associato ai segmenti S', S'', … ottenuti dalle facciate degli edifici nel modo descritto. Un arco collega $i \in P$ e $j \in F$ se e solo se la postazione corrispondente a i tiene sotto tiro il segmento di facciata corrispondente a j (in altri termini, se e solo se il segmento rosso corrispondente alla facciata a cui appartiene j ha intersezione non vuota con il cerchio corrispondente alla gittata di i). Il grafo corrispondente all'esercizio ha l'aspetto riportato qui sotto.



Una soluzione ammissibile è un insieme di nodi $D \subseteq P$ tale che ogni nodo di F sia adiacente ad almeno un nodo di D. Per formularlo si può ricorrere a un vettore $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|P|}$. Tale vettore deve rispettare disequazioni del tipo

$$\sum_{i \in N(j)} x_i \geq 1 \qquad \forall j \in F$$

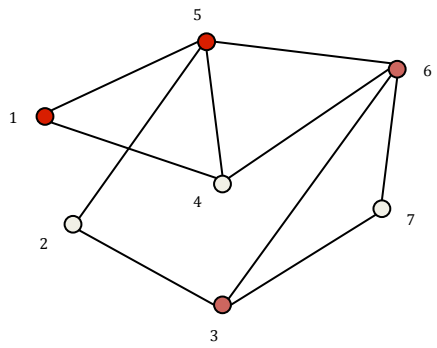
L'obiettivo consiste nel minimizzare la cardinalità dell'insieme soluzione: $\min |D| = \sum_{i \in P} x_i$

2. Dire se è possibile risolvere un problema di programmazione lineare 0-1 come quello formulato all'Esercizio 1 con il Metodo del Simplesso (vale a dire, risolvendo semplicemente il suo rilassamento lineare). Motivare la risposta.

Sì, è possibile. Infatti la matrice dei vincoli del problema gode della proprietà degli 1 consecutivi poiché ogni nodo-postazione controlla nodi-segmento consecutivi rispetto all'ordinamento degli edifici.

3. Dire se il grafo qui a destra ammette o no un insieme di vertici K che sia allo stesso tempo trasversale e knapsack di capacità 15 (i pesi sono i numeri associati ai vertici), e in caso affermativo indicarne uno.

L'insieme {1, 3, 5, 6} ha peso 1 + 3 + 5 + 6 = 15 e copre tutti gli archi del grafo.



4. Costruire un insieme di disequazioni lineari fra 7 variabili le cui soluzioni in $\{0, 1\}^7$ corrispondono agli knapsack trasversali del grafo a destra.

$x_1 + x_4 \geq 1$ $\quad x_1 + x_5 \geq 1$ $\quad x_2 + x_3 \geq 1$ $\quad x_2 + x_5 \geq 1$ $\quad x_3 + x_6 \geq 1$ $\quad x_3 + x_7 \geq 1$

$x_4 + x_5 \geq 1$ $\quad x_4 + x_6 \geq 1$ $\quad x_5 + x_6 \geq 1$ $\quad x_6 + x_7 \geq 1$ $\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 \leq 15$

5. Quale delle seguenti affermazioni è vera e quale falsa?

a)	Un matroide è definito da una famiglia subclusiva di sottoinsiemi di un qualunque insieme U: U dev'essere discreto.	*vero*	***falso***
b)	Un matroide è definito da una particolare famiglia di sottoinsiemi di un insieme discreto e finito U	***vero***	*falso*
c)	La proprietà di scambio di un matroide implica che i suoi massimali hanno tutti la medesima cardinalità	***vero***	*falso*
d)	Un matroide grafico è un caso particolare di matroide uniforme: no, in generale un insieme con $\leq k$ archi può formare dei cicli.	*vero*	***falso***
e)	Un matroide grafico è un caso particolare di matroide vettoriale: basta associare a ogni arco la colonna della matrice di incidenza nodi-archi.	***vero***	*falso*
f)	Se un problema di ottimizzazione combinatoria si risolve con il metodo Greedy, allora è definito su un matroide: solo se la funzione peso è qualsiasi.	*vero*	***falso***
g)	La matrice di incidenza nodi-archi di un grafo simmetrico è totalmente unimodulare se e solo se il grafo è bipartito: per C_5 il determinante è 2.	***vero***	*falso*
h)	La matrice di incidenza nodi-archi di un grafo orientato è totalmente unimodulare se e solo se il grafo non ammette cicli dispari: "solo se" è falso.	*vero*	***falso***

6. Risolvete con il metodo di branch-and-bound il seguente problema di knapsack 0-1:

$$\max \quad 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$
$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 10$$
$$0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1, \text{ interi}$$

Utilizzate la dicotomia rappresentata dall'albero binario di figura evidenziando:

a) la soluzione greedy calcolata al nodo radice (nodo 1) insieme al suo valore;

b) i bound z_k calcolati via via ai nodi k tramite rilassamento lineare;

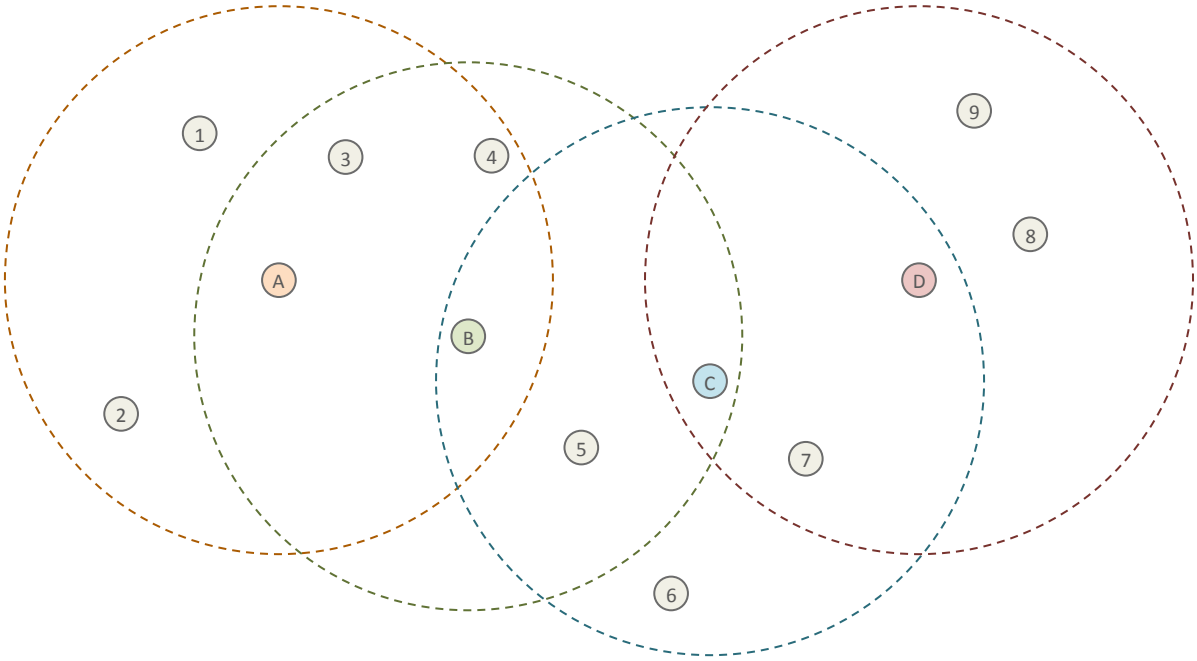
c) le diseguaglianze di sinistra ($\leq$) e di destra ($\geq$) applicate alla variabile di branching frazionaria prescelta;

d) i nodi chiusi per ottimalità e per inammissibilità.

La soluzione greedy al nodo radice è $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$ e vale $z = 8$. Dai rapporti valore/ingombro ($^3/_6$, $^2/_4$, $^5/_3$) si ricava l'ordine di preferenza $3 \angle 1 = 2$. Il rilassamento lineare al nodo 1 dà la soluzione (1, ¼, 1) di valore $z_1 = 8{,}5$. Tutti i nodi discendenti dal nodo 1 possono quindi essere chiusi per ottimalità, e la soluzione $\mathbf{x}$ dichiarata ottima.

OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA soluzione prova scritta 8 luglio 2014 – Gruppo B

1. **Interferenza.** Il disegno rappresenta una rete di telecomunicazione: i nodi numerati corrispondono a utenti, gli altri ad antenne. I cerchi indicano le possibilità di connessione fra nodi-antenna e nodi-utente. Tuttavia quando due antenne mandano il proprio segnale a un medesimo nodo-utente, si ha un'interferenza: in questo caso non si può attivare più di una delle due antenne. Si vuole attivare un insieme di antenne tale da massimizzare i nodi coperti dal segnale. Formulare il problema come programmazione lineare 0-1.



Un insieme di antenne X è ammissibile se nessun nodo-utente è raggiunto dal segnale di due antenne distinte di X. Detto V l'insieme di tutti i nodi-antenna, codifichiamo l'insieme soluzione X con il suo vettore caratteristico $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|V|}$. Indichiamo poi con U l'insieme dei nodi-utente, e per ogni coppia $i \in V$, $j \in U$, poniamo $r_{ij} = 1$ se il nodo-utente j è raggiunto dal segnale del nodo-antenna i, e $r_{ij} = 0$ altrimenti. Nel caso in esame la matrice dei coefficienti r_{ij} è la seguente:

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

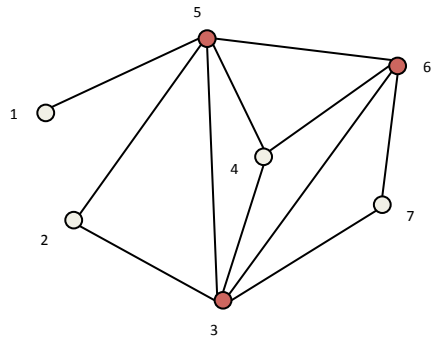
Imporre che un nodo-utente sia raggiunto dal segnale di non più di un nodo-antenna equivale a richiedere che il vettore $\mathbf{x}$ soddisfi il vincolo $\mathbf{Rx} \leq \mathbf{1}$. L'obiettivo consiste nel massimizzare la cardinalità di X, vale a dire

$$\max \quad \sum_{i \in V} x_i$$

2. Dire se è possibile risolvere il particolare problema di programmazione lineare 0-1 formulato all'Esercizio 1 con il Metodo del Simplesso (vale a dire, risolvendo semplicemente il suo rilassamento lineare). Motivare la risposta.

La rispostà è sì: la matrice $\mathbf{R}$ è totalmente unimodulare perché ha la proprietà degli 1 consecutivi (per colonna).

3. Dire se il grafo qui a destra ammette o no un insieme di vertici K che sia allo stesso tempo dominante e clique, e in caso affermativo indicarne uno.



L'insieme $Q = \{3, 5, 6\}$ è una clique ed è dominante, in quanto ogni altro nodo del grafo è adiacente ad almeno un nodo di Q.

4. Costruire un insieme di disequazioni lineari fra 7 variabili le cui soluzioni in $\{0, 1\}^7$ corrispondono alle clique dominanti del grafo a destra.

$x_1 + x_5 \geq 1$	$x_1 + x_2 \leq 1$	$x_2 + x_4 \leq 1$
$x_2 + x_3 + x_5 \geq 1$	$x_1 + x_3 \leq 1$	$x_4 + x_7 \leq 1$
$x_3 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$	$x_1 + x_4 \leq 1$	$x_5 + x_7 \leq 1$
$x_4 + x_3 + x_5 + x_6 \geq 1$	$x_1 + x_6 \leq 1$	
$x_5 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 \geq 1$	$x_1 + x_7 \leq 1$	
$x_6 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 1$	$x_2 + x_4 \leq 1$	
$x_7 + x_3 + x_6 \geq 1$	$x_2 + x_7 \leq 1$	

Le disequazioni della prima colonna richiedono che l'insieme sia dominante, quelle delle altre due che sia una clique (in rosso le variabili corrispondenti ai nodi di Q, a confermare che Q è ammissibile).

5. Quale delle seguenti affermazioni è vera e quale falsa?

a)	E' possibile definire la proprietà di scambio per i sottoinsiemi di qualunque insieme U: se U non è discreto (o almeno misurabile), non è possibile.	*vero*	***falso***
b)	Un matroide grafico è definito dai sottoinsiemi di archi di un grafo G che non ammettono cicli dispari: non solo dispari, neanche pari.	*vero*	***falso***
c)	Se i massimali di una famiglia di sottoinsiemi di un insieme discreto e finito hanno tutti la medesima cardinalità, allora la famiglia descrive un matroide: i matching massimali di C_4 hanno cardinalità 2, ma lo scambio non vale.	*vero*	***falso***
d)	Un matroide uniforme è un caso particolare di matroide grafico: per $\|U\| = 5$ e $k = 3$, non esiste insieme di 5 archi i cui sottoinsiemi non formano cicli se e solo se hanno ≤ 3 elementi.	*vero*	***falso***
e)	Un matroide uniforme è un caso particolare di matroide vettoriale: $\|U\| = n$, scegliamo n vettori di $\mathbb{R}^n$ che appartengono a un iperpiano di dimensione k	***vero***	*falso*
f)	Se un problema di ottimizzazione combinatoria si risolve con il metodo Greedy, allora è definito su un matroide: solo se la funzione peso è qualsiasi.	*vero*	***falso***
g)	La matrice di incidenza nodi-clique di un grafo simmetrico è totalmente unimodulare se e solo se il grafo è bipartito: il "solo se" è falso.	*vero*	***falso***
h)	La matrice di incidenza nodi-clique di un grafo intervallo è totalmente unimodulare: ha la proprietà degli 1 consecutivi.	***vero***	*falso*

6. Risolvete con il metodo di branch-and-bound il seguente problema di knapsack 0-1:

$$\max \quad 4x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11$$
$$0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1, \text{ interi}$$

Utilizzate la dicotomia rappresentata dall'albero binario di figura evidenziando:

a) la soluzione greedy calcolata al nodo radice (nodo 1) insieme al suo valore;
b) i bound z_k calcolati via via ai nodi k tramite rilassamento lineare;
c) le diseguaglianze di sinistra ($\leq$) e di destra ($\geq$) applicate alla variabile di branching frazionaria prescelta;
d) i nodi chiusi per ottimalità e per inammissibilità.

La soluzione greedy è $\mathbf{x} = (1, 1, 0)$ e vale 7. Dai rapporti valore/ingombro ($^4/_6$, $^3/_5$, $^1/_3$) si ottiene l'ordine di preferenza $1 \angle 2 \angle 3$. Il rilassamento lineare al nodo 1 fornisce dunque la soluzione (1, 1, 0), coincidente con $\mathbf{x}$. La soluzione è pertanto ottima.