

Nome:

Prova di CP ING. 4 aprile 2017

Prima Parte (INGE)

1. In un'urna vi sono 5 palline bianche e 7 rosse. Si fanno tre estrazioni con reinserimento. Qual è la probabilità di pescare esattamente 2 palline rosse?

2. La seguente

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad P(X = -1) = \frac{1}{3}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{6}$$

è una densità di probabilità ? Giustificare la risposta.

3. Enunciare e dimostrare la formula di Bayes.

4. Siano  $X_1, X_2, X_3$  tre v.a. indipendenti tutte con densità  $\text{geom}(\frac{1}{2})$ . Qual è la media di  $\min(X_1, X_2, X_3)$ ?

5. (INGE)

Gegè ogni mattina alle 8 va in pasticceria e sceglie una pastarella di tipo A per fare colazione, ma a quell'ora la pasticceria produce soltanto quattro pastarelle di tipo A.

Prima di Gegè in pasticceria possono arrivare 2, 3 o 4 clienti con uguale probabilità. Ogni cliente che arriva sceglie indipendentemente dagli altri una (ed una sola) pastarella del tipo A con probabilità  $\frac{1}{4}$ .

- (a) Calcolare la probabilità che a Gegè sia rimasta l'ultima pastarella di tipo A.
- (b) Sapendo che a Gegè è rimasta l'ultima pastarella di tipo A, calcolare la probabilità che siano arrivati esattamente 3 clienti prima di lui.

6. (INGE + MATE)

Siano  $X$  ed  $Y$  due v.a. discrete a valori rispettivamente in  $\{-2, 0, 1\}$  ed in  $\{-2, 1, 3\}$ . La loro densità congiunta  $p_{X,Y}(x, y)$  è descritta dalla tabella

| $Y/X$    | $X = -2$       | $X = 0$        | $X = 1$        |
|----------|----------------|----------------|----------------|
| $Y = -2$ | $\frac{1}{4}$  | $\frac{1}{20}$ | $\alpha$       |
| $Y = 1$  | 0              | $\frac{1}{8}$  | $\frac{1}{10}$ |
| $Y = 3$  | $\frac{1}{10}$ | 0              | $\frac{1}{8}$  |

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- (a) Calcolare  $\alpha$ .
- (b) Calcolare le densità marginali  $p_X$  e  $p_Y$ .
- (c) Calcolare  $E\left(\frac{X}{Y}\right)$  e  $\frac{E(X)}{E(Y)}$ .

7. Vi sono due mazzi di carte napoletane,  $A$  e  $B$ . Dal mazzo  $A$  si fanno estrazioni con reinserimento finché non esce il primo Re, mentre dal mazzo  $B$  si fanno estrazioni con reinserimento finché non esce il primo Cavallo.

Se indichiamo con  $T_1$  il numero di estrazioni necessarie per il primo Re da  $A$  e  $T_2$  numero di estrazioni necessarie per il primo Cavallo da  $B$ .

- (a) Calcolare la probabilità che ci vogliano almeno 5 estrazioni su ogni mazzo per ottenere il primo Cavallo od il primo Re.
- (b) Calcolare la varianza di  $T_1 + T_2$ .

Matematici

8. (MATE)

Gegè ogni mattina alle 8 va in pasticceria e sceglie un particolare tipo di pastarella per fare colazione. Indichiamo con  $A$  questo tipo.

La pasticceria a quell'ora produce soltanto quattro pezzi di pastarella di tipo  $A$ .

Prima di Gegè in pasticceria possono arrivare 2, 3 o 4 clienti con uguale probabilità. Ogni cliente che arriva sceglie indipendentemente dagli altri una pastarella del tipo  $A$  con probabilità  $\frac{1}{4}$ . Indichiamo con  $X$  il numero di pastarelle rimaste all'arrivo di Gegè.

- (a) Calcolare la densità di  $X$ .
- (b) Sapendo che non sono rimaste pastarelle di tipo  $A$ , calcolare la probabilità che siano arrivati esattamente 4 clienti prima di lui.

9. (MATE)

Vi sono due mazzi di carte napoletane,  $A$  e  $B$ . Si effettuano estrazioni con reinserimento su entrambi i mazzi.  $T_1$  indica il numero di estrazioni necessario per il primo Re dal mazzo  $A$ , mentre  $T_2$  indica il numero di estrazioni necessario per il primo Cavallo dal mazzo  $B$ .

- (a) Calcolare la probabilità che ci vogliano almeno 6 estrazioni perché esca il primo Re sul mazzo  $A$  ed il primo Cavallo sul mazzo  $B$ .
- (b) Se  $T$  è il numero di estrazioni necessarie per estrarre il primo Cavallo ed il primo Re, calcolare  $E(T)$ .
- (c) Calcolare la **varianza** di  $T_1 + T_2$ .

10. (MATE)

Un gioco a premi ha un montepremi di 32 euro e vengono poste 6 domande ad un concorrente. ad ogni risposta errata il montepremi viene dimezzato. alla prima risposta esatta il concorrente vince il montepremi rimasto. Se non si da nessuna risposta esatta non si vince nulla. Un certo concorrente da una risposta esatta con probabilità  $\frac{1}{3}$  ogni volta indipendentemente dalle risposte alle altre domande. Sia  $X$  la vincita di questo concorrente.

- (a) Determinare la densità di  $X$ .
- (b) Calcolare  $E(X)$ .