**OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA** **GRUPPO A**

**Prova scritta dell'8 luglio 2015**

**1.** Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico, e $B \subseteq V$ un insieme di vertici. Diciamo $B$-dominante un insieme di vertici $D$ che domina i vertici di $B$: in altri termini, ogni nodo di $B$ è a distanza $\leq 1$ da un nodo di $D$. In particolare, un insieme $V$-dominante è un insieme dominante secondo la definizione tradizionale. Rispondete alle domande seguenti distinguendo le risposte vere da quelle false:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a*) | Siano $B_1 \subseteq B_2 \subseteq V$ e $D_k$ un insieme $B_k$-dominante di cardinalità minima. Allora $D_1 \subseteq D_2$. | *vero* | *falso* |
| *b*) | Siano $B_1 \subseteq B_2 \subseteq V$ e $D_2$ un insieme $B_2$-dominante. Allora $D_2$ è anche $B_1$-dominante. | *vero* | *falso* |
| *c*) | Sia $A = B_1 \cap B_2 \subseteq V$ e $D_k$ un insieme $B_k$-dominante. Allora $D_1$ e $D_2$ sono entrambi $A$-dominanti. | *vero* | *falso* |
| *d*) | Siano $B_1 \subseteq B_2 \subseteq V$. Allora esistono un $B_1$-dominante $D_1$ e un $B_2$-dominante $D_2$, entrambi di cardinalità minima, tali che $D_1 \subseteq D_2$. | *vero* | *falso* |

Per il punto (*a*), la frase non è necessariamente vera (quindi in generale è falsa): prendiamo un grafo con tre nodi $u$, $v$, $w$ e due archi $uv$, $vw$, e supponiamo $B_1 = \{u\}$, $B_2 = \{u, w\}$; quindi $B_1 \subseteq B_2$. Si può scegliere $D_1 = \{u\}$ e $D_2 = \{v\}$, e come si vede $D_1 \not\subseteq D_2$.

Per il punto (*b*), ogni nodo di $B_2$ è a distanza $\leq 1$ da almeno un nodo di $D_2$, e siccome $B_1 \subseteq B_2$ questo vale in particolare per ogni nodo di $B_1$. Quindi $D_2$ domina $B_1$.

Per il punto (*c*) si ripete lo stesso ragionamento del punto (*b*): $A$ è infatti sottoinsieme sia di $B_1$ che di $B_2$.

Infine per il punto (*d*) consideriamo il grafo $P_6 = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{12, 23, 34, 45, 56\})$, e siano $B_1 = \{3, 4\} \subseteq \{1, 3, 4, 6\} = B_2$; il più piccolo $B_1$-dominante è $D_1 = \{3\}$ oppure $D_1 = \{4\}$, mentre il più piccolo $B_2$-dominante è $D_2 = \{2, 5\}$.

**2.** In un supermercato aperto h24 le statistiche sulle vendite consigliano in ogni ora $h$ un dato numero $a_h$ di casse aperte. Gli addetti alle casse possono prestare la loro opera in un insieme di turni: ogni turno $t$ inizia a una certa ora, termina a un'altra e ha un costo $c_t$. Si vuole pianificare la presenza degli addetti in un certo giorno. Tenendo presente i turni coperti durante il mese, in quel giorno l'addetto $k$ può essere chiamato al massimo in un turno appartenente a un certo insieme di turni $T_k$. Detto inoltre $T = \cup_k T_k$ l'insieme di tutti i turni potenzialmente coperti dagli addetti, indichiamo con $C_h$ il sottoinsieme di turni di $T$ che copre l'ora $h$. Formulare come programmazione lineare 0-1 il problema di scegliere i turni minimizzandone il costo complessivo e avendo, in ogni ora $h$ del giorno, almeno $a_h$ addetti a disposizione.

Le variabili di decisione del problema possono essere delle $x_t \in \{0, 1\}$ che assumono valore 1 se e solo se si sceglie il turno $t$. La funzione obiettivo si scrive quindi semplicemente

$$\min \quad \sum_{t \in T} c_t x_t$$

Il vincolo di copertura delle casse in ogni ora si esprime

$$\sum_{t \in C_h} x_t \geq a_h \qquad \text{per ogni ora } h \text{ del giorno}$$

Infine, un addetto non può vedersi assegnati due o più turni:

$$\sum_{t \in T_k} x_t \leq 1 \qquad \text{per ogni addetto } k$$

**3.** La distanza fra due nodi in un grafo è com'è noto definita dalla lunghezza del cammino più breve che li congiunge. La matrice **A** di figura riporta le lunghezze degli archi di un grafo ($a_{ij}$ = lunghezza dell'arco di estremi ($i$, $j$), se non riportato significa che l'arco non esiste). Si sa che il nodo $h$ è a distanza 30 da un certo nodo. Quale? Scrivete una formula che consenta di individuarlo e, senza disegnare il grafo ma usando solo la matrice, descrivetene in dettaglio l'applicazione specificando tutti i passi e le condizioni iniziali.

| | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* | *h* | *i* | *j* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | - | 6 | - | - | - | - | - | - | 6 | - |
| *b* | - | - | - | - | 3 | - | - | - | - | - |
| *c* | 2 | - | - | - | - | - | 24 | - | 6 | - |
| *d* | - | - | 5 | - | - | - | - | - | - | - |
| *e* | - | - | - | - | - | - | - | 16 | - | 6 |
| *f* | - | - | 4 | - | - | - | - | - | - | - |
| *g* | - | - | - | - | 4 | - | - | - | - | 4 |
| *h* | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 6 |
| *i* | - | - | - | - | 3 | - | 12 | - | - | - |
| *j* | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

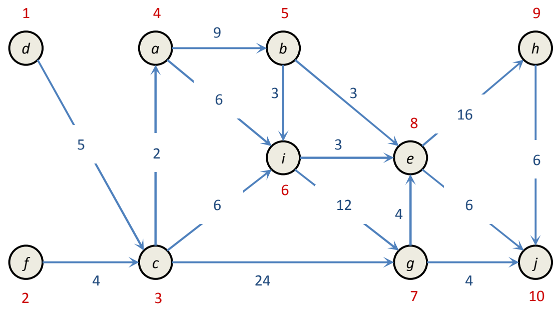
Occorre prima di tutto determinare se il grafo in questione ammette un ordinamento topologico. A questo fine si determina l'insieme dei nodi privi di predecessori, gli si attribuisce un ordine arbitrario, lo si elimina dal grafo e si procede fino a completare l'ordinamento. Un nodo privo di predecessori corrisponde a una colonna priva di valori della matrice **A**. Il primo insieme privo di predecessori è formato dai nodi $d$ e $f$, ai quali diamo rispettivamente ordine 1 e 2. Eliminate le righe e le colonne corrispondenti si ottiene la matrice

| | *a* | *b* | *c* | 1 | *e* | 2 | *g* | *h* | *i* | *j* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | - | 6 | - | | - | | - | - | 6 | - |
| *b* | - | - | - | | 3 | | - | - | - | - |
| *c* | 2 | - | - | | - | | 24 | - | 6 | - |
| 1 | | | | | | | | | | |
| *e* | - | - | - | | - | | - | 16 | - | 6 |
| 2 | | | | | | | | | | |
| *g* | - | - | - | | 4 | | - | - | - | 4 |
| *h* | - | - | - | | - | | - | - | - | 6 |
| *i* | - | - | - | | 3 | | 12 | - | - | - |
| *j* | - | - | - | | - | | - | - | - | - |

In questa matrice è ora la colonna $c$ a risultare priva di valori. Diamo dunque numero d'ordine 3 al nodo $c$ e cancelliamo la colonna, ottenendo:

| | *a* | *b* | 3 | 1 | *e* | 2 | *g* | *h* | *i* | *j* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | - | 6 | | | - | | - | - | 6 | - |
| *b* | - | - | | | 3 | | - | - | - | - |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | |
| *e* | - | - | | | - | | - | 16 | - | 6 |
| 2 | | | | | | | | | | |
| *g* | - | - | | | 4 | | - | - | - | 4 |
| *h* | - | - | | | - | | - | - | - | 6 |
| *i* | - | - | | | 3 | | 12 | - | - | - |
| *j* | - | - | | | - | | - | - | - | - |

A questo punto la colonna priva di valori è la $a$: il nodo corrispondente riceve numero d'ordine 4. Proseguendo, si giunge all'ordinamento topologico di figura (per comodità la figura riporta il grafo, ma l'essenziale è la corrispondenza nodo-ordine):




Per rispondere alla domanda si può ora applicare a ritroso la formula del percorso minimo dal nodo $h$ a tutti gli altri:

$$c_u \quad = \quad \min_{uv \in E}\{c_v + a_{uv}\}$$

con la condizione iniziale $c_h = c_9 = 0$. Sviluppando i calcoli si ricava:

$$c_8 = c_9 + 16 = 16 \qquad c_7 = c_8 + 4 = 20 \qquad c_6 = \min\{c_8 + 3, c_7 + 4\} = 19$$

$$c_5 = \min\{c_8 + 3, c_6 + 3\} = 19 \qquad c_4 = \min\{c_5 + 9, c_6 + 6\} = 25$$

$$c_3 = \min\{c_4 + 2, c_6 + 6, c_7 + 24\} = 25$$

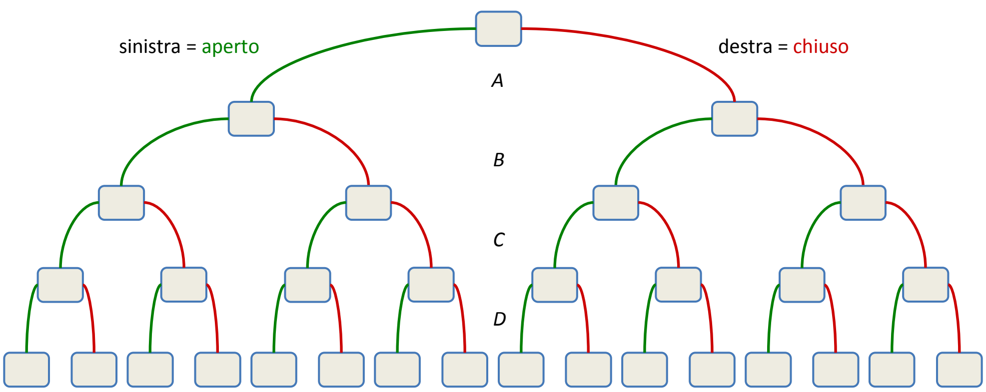
$$c_2 = c_3 + 4 = 29 \qquad c_1 = c_3 + 5 = 30$$

**4.** Otto negozi si riforniscono da dei centri di distribuzione, e ciascun negozio ricorre a quello più vicino: la seguente tabella fornisce le distanze in km fra negozi e centri.

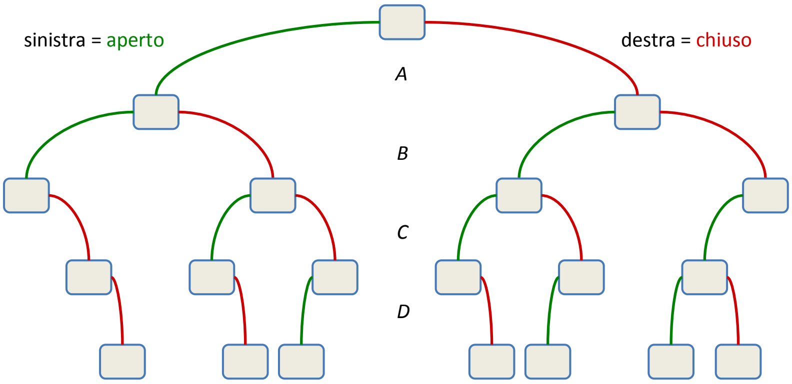
*negozi*

| *centri* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 21 | 31 | 34 | 9 | 52 | 43 | 48 | 16 |
| *B* | 12 | 8 | 25 | 28 | 61 | 13 | 47 | 52 |
| *C* | 18 | 80 | 19 | 46 | 52 | 71 | 17 | 22 |
| *D* | 18 | 77 | 27 | 41 | 54 | 52 | 12 | 43 |

Per risparmiare, la società che gestisce la catena ha deciso di chiudere due dei quattro centri. Il problema consiste nello scegliere quali centri lasciare aperti in modo da minimizzare la somma delle distanze dei negozi dai centri dai quali si serviranno. Si tratta insomma di un problema di 2-mediana. Risolvere il problema con un metodo di branch-and-bound utilizzando come limitazione inferiore la soluzione di problemi di assegnamento (si ricordi che un problema di assegnamento si risolve all'ottimo con il metodo greedy). Riportare il calcolo con le scelte effettuate e i valori dei bound sull'albero di ricerca seguente, cancellando fin dall'inizio i sottoproblemi inammissibili.



Anzitutto l'albero di ricerca può essere ridotto eliminando a priori i nodi inammissibili, che sono quelli raggiunti da cammini con più di due centri aperti. Poiché inoltre una soluzione con 2 centri aperti non può costare più di una con un solo centro aperto (il costo è dato dalla sola somma delle distanze dei negozi dai centri), possiamo eliminare anche i cammini che hanno un solo centro aperto. Il risultato è riportato in figura.




Una limitazione inferiore si ha immediatamente risolvendo con i dati della tabella un problema di assegnamento con l'algoritmo greedy. Ciascun negozio, in altri termini, è assegnato al centro a lui più vicino. Il risultato, indicato nella tabella qui sotto (Tab. 1) con i numeri in blu, ha un costo $LB_0$ = 141 km. Questa soluzione è tuttavia inammissibile perché coinvolge tutti e quattro i centri. Una soluzione ammissibile può trovarsi assegnando tutti e otto i negozi a un solo centro. La migliore scelta, di costo $UB_0$ = 246 km, consiste nell'assegnarli al centro $B$.

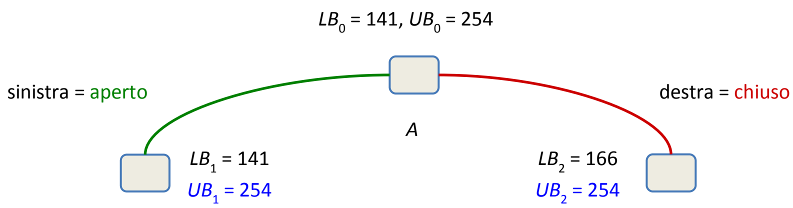
| **Tab. 1** | | negozi | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| centri | A | 21 | 31 | 34 | 9 | 52 | 43 | 48 | 16 |
| | B | 12 | 8 | 25 | 28 | 61 | 13 | 47 | 52 |
| | C | 18 | 80 | 19 | 46 | 52 | 71 | 17 | 22 |
| | D | 18 | 77 | 27 | 41 | 54 | 52 | 12 | 43 |

Iniziamo l'esplorazione dal nodo radice ed esaminiamo il ramo di sinistra: questa scelta corrisponde a scegliere di aprire il centro $A$. La limitazione inferiore resta inalterata: $LB_1 = LB_0$.

Esaminiamo ora il ramo di destra. In questo caso stiamo decidendo di chiudere il centro $A$. La limitazione inferiore cambia: con il centro $A$ chiuso, il metodo greedy fornisce la soluzione riportata in Tab. 2, di valore $LB_2$ = 166 km.

| **Tab. 2** | | negozi | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| centri | A | 21 | 31 | 34 | 9 | 52 | 43 | 48 | 16 |
| | B | 12 | 8 | 25 | 28 | 61 | 13 | 47 | 52 |
| | C | 18 | 80 | 19 | 46 | 52 | 71 | 17 | 22 |
| | D | 18 | 77 | 27 | 41 | 54 | 52 | 12 | 43 |

Riepilogando, al momento lo stato del calcolo è il seguente (in blu il miglior valore trovato finora):

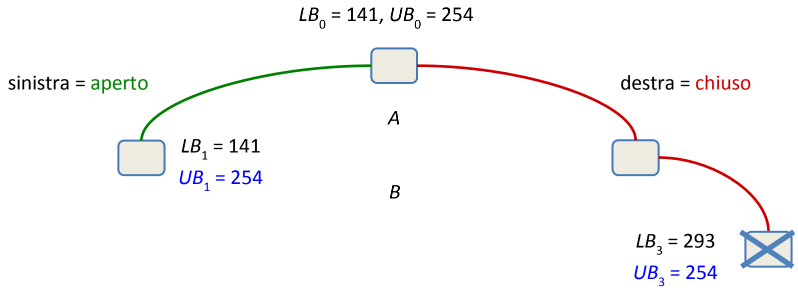



Procediamo verso destra: dobbiamo ora scegliere se chiudere o aprire $B$. Nel primo caso la limitazione inferiore cambia nuovamente:

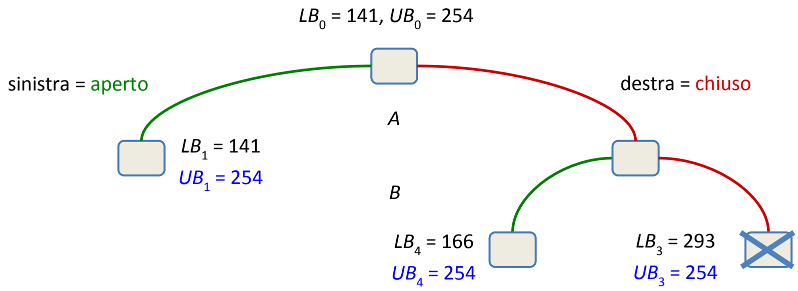
negozi

| Tab. 3 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| centri | A | 21 | 31 | 34 | 9 | 52 | 43 | 48 | 16 |
| | B | 12 | 8 | 25 | 28 | 61 | 13 | 47 | 52 |
| | C | 18 | 80 | 19 | 46 | 52 | 71 | 17 | 22 |
| | D | 18 | 77 | 27 | 41 | 54 | 52 | 12 | 43 |

Il valore ottenuto è $LB_3 = 293$, che (rappresenta una soluzione ammissibile ma comunque) è peggiore di $UB_1 = UB_2 = 254$. Quindi il nodo può essere chiuso. Lo stato del calcolo è dunque




Decidiamo allora di aprire $B$. Tanto la soluzione euristica di valore $UB_2 = 254$ quanto la limitazione inferiore $LB_2 = 254$ restano valide. Quindi, come illustrato nella figura seguente, $LB_4 = LB_2$, $UB_4 = UB_2$.

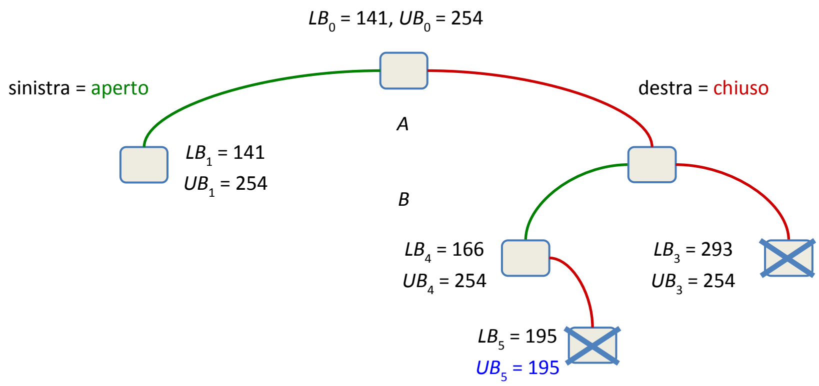



Procediamo in profondità e risolviamo la dicotomia relativa al centro $C$. Se decidiamo di chiudere $C$, la soluzione greedy è ammissibile, e vale $UB_5 = 195$ (vedi tabella). Si tratta della soluzione ottima in questo ramo della computazione, quindi il nodo può chiudersi; inoltre è una soluzione migliore di quella corrente (di valore 254) e quindi anche questa può essere aggiornata.

negozi

| Tab. 4 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| centri | A | 21 | 31 | 34 | 9 | 52 | 43 | 48 | 16 |
| | B | 12 | 8 | 25 | 28 | 61 | 13 | 47 | 52 |
| | C | 18 | 80 | 19 | 46 | 52 | 71 | 17 | 22 |
| | D | 18 | 77 | 27 | 41 | 54 | 52 | 12 | 43 |

La situazione ora è

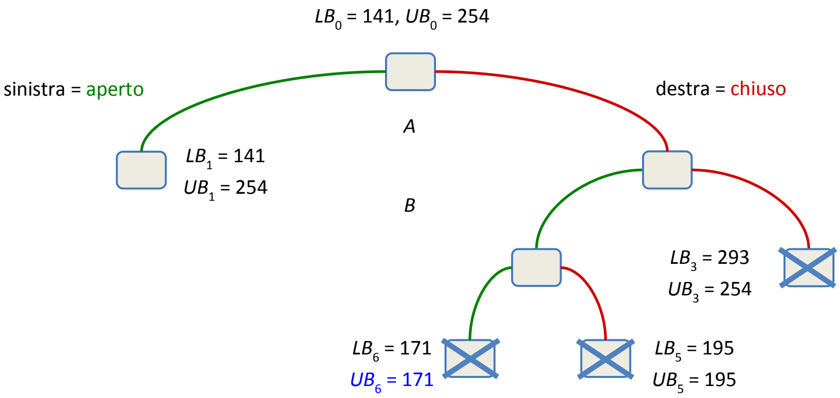


Dall’altro lato, aprire *C* significa anche chiudere *D*. Il metodo greedy dà

**Tab. 5** (negozi / centri)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 21 | 31 | 34 | 9 | 52 | 43 | 48 | 16 |
| *B* | 12 | 8 | 25 | 28 | 61 | 13 | 47 | 52 |
| *C* | 18 | 80 | 19 | 46 | 52 | 71 | 17 | 22 |
| *D* | 18 | 77 | 27 | 41 | 54 | 52 | 12 | 43 |

cioè una soluzione di valore $UB_6 = 171$. Anche in questo caso il nodo è chiuso perché la soluzione trovata è quella (localmente) ottima. In realtà, questa soluzione è migliore della precedente, e quindi la sostituisce.




Rimane ora da risalire alla radice e considerare l’unico problema rimasto attivo. Da questo lato, il centro A risulta aperto. Decidiamo quindi se aprire anche *B* oppure chiuderlo. Nel primo caso, il greedy trova la soluzione localmente ottima

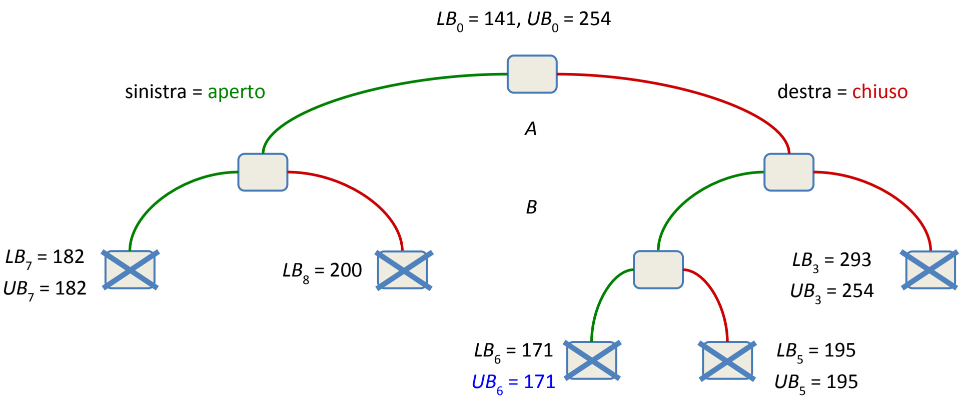
**Tab. 6** (negozi / centri)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 21 | 31 | 34 | 9 | 52 | 43 | 48 | 16 |
| *B* | 12 | 8 | 25 | 28 | 61 | 13 | 47 | 52 |
| *C* | 18 | 80 | 19 | 46 | 52 | 71 | 17 | 22 |
| *D* | 18 | 77 | 27 | 41 | 54 | 52 | 12 | 43 |

di valore $UB_7 = 182$. Questa soluzione non aggiorna la precedente, che rimane ancora la migliore. Nel secondo caso, una limitazione inferiore si ha con l’assegnamento ottimo assoggettato alla chiusura di *B*:

**Tab. 7** (negozi / centri)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 21 | 31 | 34 | 9 | 52 | 43 | 48 | 16 |
| *B* | 12 | 8 | 25 | 28 | 61 | 13 | 47 | 52 |
| *C* | 18 | 80 | 19 | 46 | 52 | 71 | 17 | 22 |
| *D* | 18 | 77 | 27 | 41 | 54 | 52 | 12 | 43 |




Si ottiene una soluzione (inammissibile) di valore 200, cioè maggiore dell’ottimo corrente. Il nodo può dunque chiudersi per ottimalità. La soluzione ottima è dunque quella riportata in Tab. 5. Il diagramma a lato riassume la chiusura della computazione.

**OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA** **GRUPPO B**

**Prova scritta dell'8 luglio 2015**

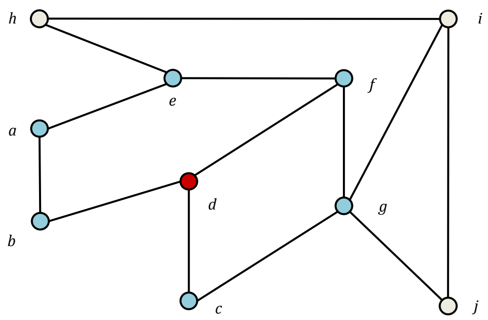
**1.** Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico, e $B \subseteq V$ un insieme di vertici. Diciamo $B$-dominante un insieme di vertici $D$ che domina quelli di $B$: in altri termini, ogni nodo di $B$ è a distanza $\leq 1$ da un nodo di $D$. In particolare, un insieme $V$-dominante è un insieme dominante secondo la definizione tradizionale. Rispondete alle domande seguenti distinguendo le risposte vere da quelle false:

| | | |
|---|---|---|
| *a*) Siano $B_1 \subseteq B_2 \subseteq V$ e $D_k$ un insieme $B_k$-dominante di cardinalità minima. Allora $D_1 \subseteq D_2$. | *vero* | *falso* |
| *b*) Siano $B_1 \subseteq B_2 \subseteq V$ e $D_2$ un insieme $B_2$-dominante. Allora $D_2$ è anche $B_1$-dominante. | *vero* | *falso* |
| *c*) Sia $A = B_1 \cup B_2 \subseteq V$ e $D_k$ un insieme $B_k$-dominante. Allora $D_1 \cup D_2$ è $A$-dominante. | *vero* | *falso* |
| *d*) Siano $B_1 \subseteq B_2 \subseteq V$. Allora esistono un $B_1$-dominante $D_1$ e un $B_2$-dominante $D_2$, entrambi di cardinalità minima, tali che $D_1 \subseteq D_2$. | *vero* | *falso* |

Per i punti (*a*), (*b*), (*d*), vedi soluzione gruppo A.

Per il punto (*c*), tutti i nodi di $B_k$ si trovano a distanza $\leq 1$ da almeno un punto di $D_k$, quindi a distanza $\leq 1$ da almeno un nodo di $D_1 \cup D_2$.

**2.** Oggi, che è mercoledì, il commissario Montalbano è venuto a sapere che lunedì scorso Diabolik era nascosto nel nodo $d$ del grafo di figura. Ogni giorno che passa, Diabolik *può* (ma non è obbligato a) passare da un nodo a uno adiacente, perciò oggi si trova certamente in uno dei nodi a distanza $\leq 2$ da $d$. Il commissario sa da fonte certa che giovedì Diabolik si muoverà dal suo attuale nascondiglio. Formulate come programmazione lineare 0-1 il problema di determinare il minimo numero di agenti da disporre sui nodi per essere certi che almeno uno di loro lo intercetti giovedì.




Si tratta di trovare il più piccolo insieme $B_2$ dominante, dove $B_k$ è l'insieme dei nodi a distanza $\leq k$ da $d$. Oltre a $d$, tale insieme contiene i nodi di colore azzurro: $a$, $b$, $c$, $e$, $f$, $g$. In ciascuno di questi nodi o nel suo intorno deve essere presente almeno un agente. Detta $x_k$ una variabile binaria che assume valore 1 se e solo si dispone un agente sul nodo $k$, i vincoli si scrivono:

$$x_a + x_b + x_e \geq 1 \qquad x_b + x_a + x_d \geq 1 \qquad x_c + x_d + x_g \geq 1 \qquad x_d + x_b + x_c + x_f \geq 1$$

$$x_e + x_a + x_f + x_h \geq 1 \qquad x_f + x_d + x_e + x_g \geq 1 \qquad x_g + x_c + x_f + x_i + x_j \geq 1$$

L'obiettivo è min $(x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g + x_h + x_i + x_j)$

**3.** Vedi soluzione gruppo A.

**4.** Vedi soluzione gruppo A.