OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA **GRUPPO A**
Prova scritta del 15 settembre 2015

Cognome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Nome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Matricola: |__|__|__|__|__|__|

1. Rispondete alle domande seguenti distinguendo le risposte vere da quelle false:

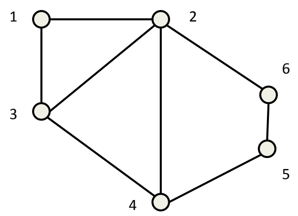
a) Un grafo intervallo non può essere bipartito.

b) Sia S un insieme di vertici formato prendendo al più un estremo di ciascun arco di un matching M. Allora S è stabile.

c) Qualsiasi grafo cubico ammette una partizione dei suoi archi in tre matching distinti M_1, M_2, M_3.

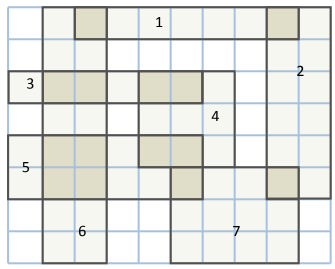
d) Sia $c_u \in \mathbb{R}$ associato $u \in U$, e $\Im = \{X \subseteq U\colon |X| > k\}$. Usando l'algoritmo greedy si può trovare l'insieme $X^* \in \Im$ di peso minimo.

vero	*falso*
vero	*falso*
vero	*falso*
vero	*falso*



2. Dato il grafo $G = (V, E)$ di figura, sia S un sottoinsieme di V e sia $N(S)$ l'insieme dei vertici adiacenti ad almeno un vertice di S. Si vuole trovare un insieme S che massimizzi $|S - N(S)|$. Formulare il problema come programmazione lineare 0-1 sul grafo dato, eliminare il vincolo di interezza e scriverne il duale. Si ha garanzia che soluzioni dei due PL siano intere? Se sì, perché?

3. Il disegno accanto mostra 7 rettangoli numerati progressivamente. Le aree più scure indicano le intersezioni fra i rettangoli. Formulate su un opportuno grafo il problema di massimizzare l'area delle intersezioni scegliendole in modo che nessun rettangolo dei sette originali sia intersecato due volte (calcolate le aree basandovi sulla griglia indicata nel disegno).
Descrivete un algoritmo per risolvere il problema nel caso in esame e mostratene alcuni passi.



4. In un problema di KNAPSACK 0-1 con penalità, il generico oggetto k è associato a un ingombro a_k, un profitto p_k e un costo c_k. Il profitto dello zaino, che rispetta la solita disequazione $a_1x_1 + \ldots a_nx_n \leq b$, va detratto del più grande fra i costi degli elementi in esso contenuti. Ad esempio, se una soluzione $\mathbf{x}$ contiene i soli elementi 1 e 2, il suo valore sarà $p(\mathbf{x}) = p_1 + p_2 - \max\{c_1, c_2\}$. Consideriamo il problema

$$\max \quad 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 - c$$
$$6x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5 \leq 11 \quad \text{dove} \quad c \geq c_k x_k \text{ per ogni oggetto } k$$
$$x_k \in \{0, 1\}$$

Come si vede, se $x_k = 1$ allora il profitto è detratto di una quantità pari ad almeno c_k, e massimizzando si ottiene l'effetto di sottrarre esattamente la penalità più grande fra quelle associate agli oggetti selezionati. Risolvete questo problema con un algoritmo di branch-and-bound per le penalità c_k sotto riportate.

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
5	1	6	3	7

OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA **GRUPPO B**
Prova scritta del 15 settembre 2015

Cognome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Nome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Matricola: |__|__|__|__|__|__|

1. Rispondete alle domande seguenti distinguendo le risposte vere da quelle false:

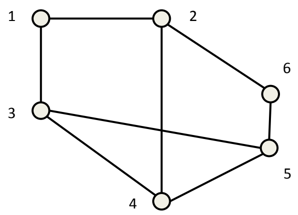
a) Esistono grafi intervallo non bipartiti e grafi bipartiti non intervallo.

b) Matching, clique, insieme stabile, edge-cover e trasversale si risolvono tutti in tempo polinomiale se il grafo è un albero.

c) Un grafo r-regolare è euleriano se e solo se r è un numero pari.

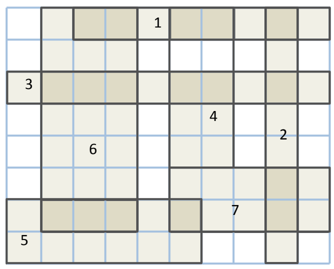
d) Sia $c_u \in \mathbb{R}$ associato $u \in U$, e $\Im = \{X \subseteq U\text{: } U - X \text{ albero ricoprente di } G\}$. Si può usare il greedy per trovare l'insieme $X^* \in \Im$ di peso minimo.

vero	*falso*
vero	*falso*
vero	*falso*
vero	*falso*



2. Dato il grafo $G = (V, E)$ di figura, sia S un sottoinsieme di V e sia $N(S)$ l'insieme dei vertici adiacenti ad almeno un vertice di S. Si vuole trovare un insieme S che massimizzi $|S - N(S)|$. Formulare il problema come programmazione lineare 0-1 sul grafo dato, eliminare il vincolo di interezza e scriverne il duale. Si ha garanzia che soluzioni dei due PL siano intere? Se sì, perché?

3. Il disegno accanto mostra 7 rettangoli numerati progressivamente. Le aree più scure indicano le intersezioni fra i rettangoli. Formulate su un opportuno grafo il problema di massimizzare l'area delle intersezioni scegliendole in modo che nessun rettangolo dei sette originali sia intersecato due volte (calcolate le aree basandovi sulla griglia indicata nel disegno).
Descrivete un algoritmo per risolvere il problema nel caso in esame e mostratene alcuni passi.



4. In un problema di KNAPSACK 0-1 con penalità, il generico oggetto k è associato a un ingombro a_k, un profitto p_k e un costo c_k. Il profitto dello zaino, che rispetta la solita disequazione $a_1x_1 + \dots a_nx_n \leq b$, a detratto del più grande fra i costi degli elementi in esso contenuti. Ad esempio, se una soluzione $\mathbf{x}$ contiene i soli elementi 1 e 2, il suo valore sarà $p(\mathbf{x}) = p_1 + p_2 - \max\{c_1, c_2\}$. Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 - c \\ & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5 \leq 11 \quad \text{dove} \quad c \geq c_k x_k \text{ per ogni oggetto } k \\ & x_k \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Come si vede, se $x_k = 1$ allora il profitto è detratto di una quantità pari ad almeno c_k, e massimizzando si ottiene l'effetto di sottrarre esattamente la penalità più grande fra quelle associate agli oggetti selezionati. Risolvete questo problema con un algoritmo di branch-and-bound per le penalità c_k sotto riportate.

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
4	2	7	4	8