Ottimizzazione Combinatoria

Geometria Poliedrale

(cose da sapere)

Claudio Arbib

claudio.arbib@univaq.it

Università dell'Aquila

Vettori

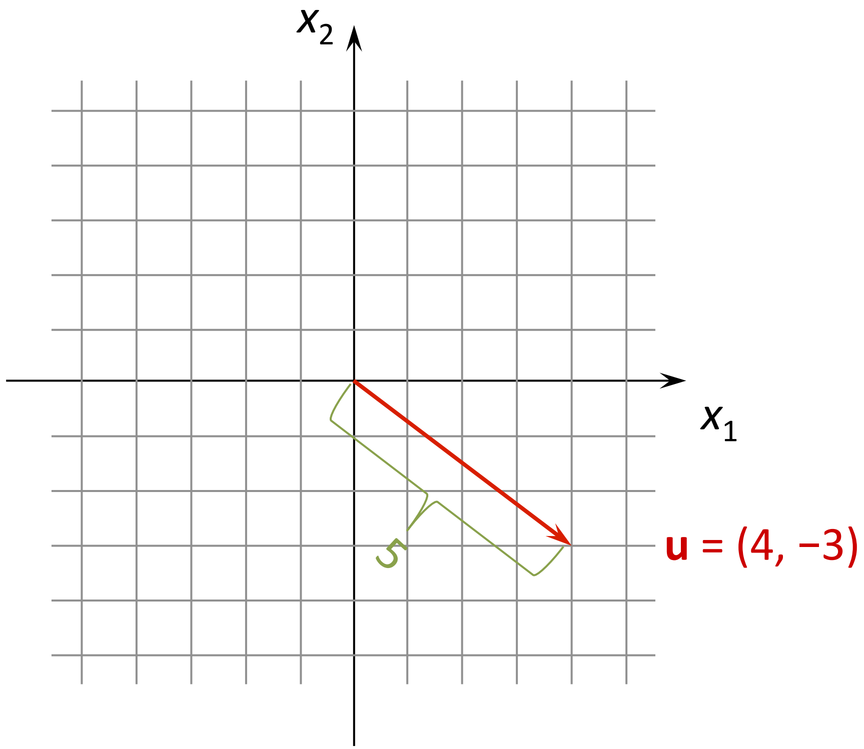
- Un vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ è una collezione ordinata di n numeri reali, detti componenti del vettore, e si indica con $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$

- Ogni vettore ha una sua rappresentazione geometrica in un riferimento cartesiano ortogonale

- Il modulo $|\mathbf{u}|$ è la lunghezza del segmento che collega il punto $(u_1, \ldots, u_n)$ all'origine

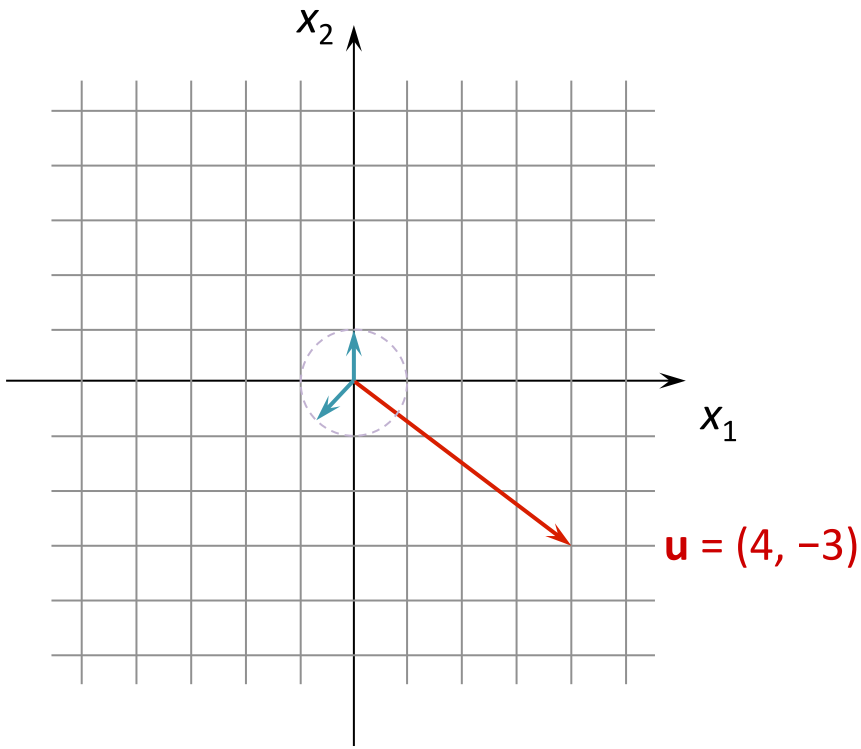
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$



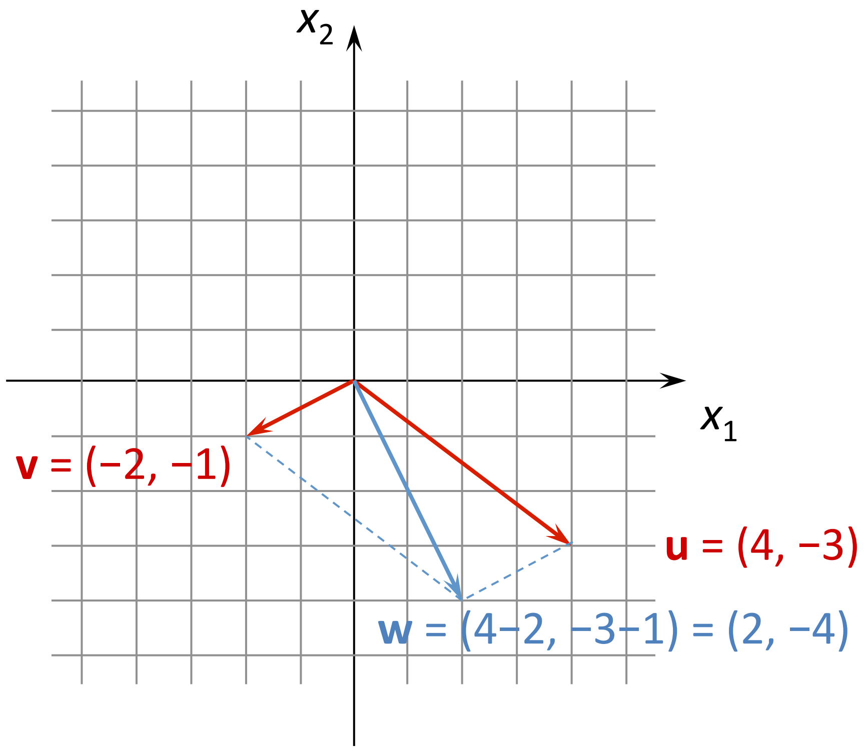
Vettori

- Un vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ è una collezione ordinata di n numeri reali, detti componenti del vettore, e si indica con $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$
- Ogni vettore ha una sua rappresentazione geometrica in un riferimento cartesiano ortogonale
- Se $\mathbf{v}$ ha modulo $|\mathbf{v}| = 1$ lo chiamiamo versore
- I versori di $\mathbb{R}^n$ formano la frontiera di una sfera



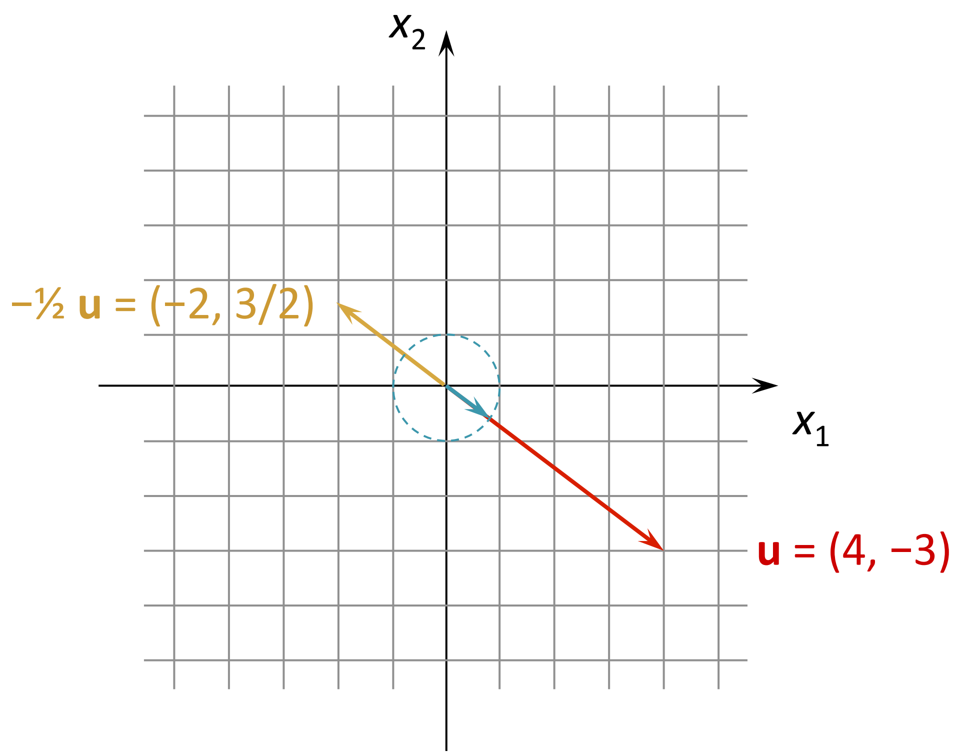
Vettori

- Un vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ è una collezione ordinata di n numeri reali, detti componenti del vettore, e si indica con $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$
- La somma di due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ è $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$
- La sua rappresentazione si costruisce con la ben nota regola del parallelogramma



Vettori

- Un vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ è una collezione ordinata di n numeri reali, detti componenti del vettore, e si indica con $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$
- Il prodotto di un vettore $\mathbf{u}$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ è
  $$\lambda\mathbf{u} = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n)$$
- Con $\lambda < 0$, $\lambda\mathbf{u}$ ha verso opposto a $\mathbf{u}$
- Il vettore $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|$ ha modulo
  $$\left|\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\right| = \frac{\sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}}{|\mathbf{u}|} = 1$$
  e quindi è un versore

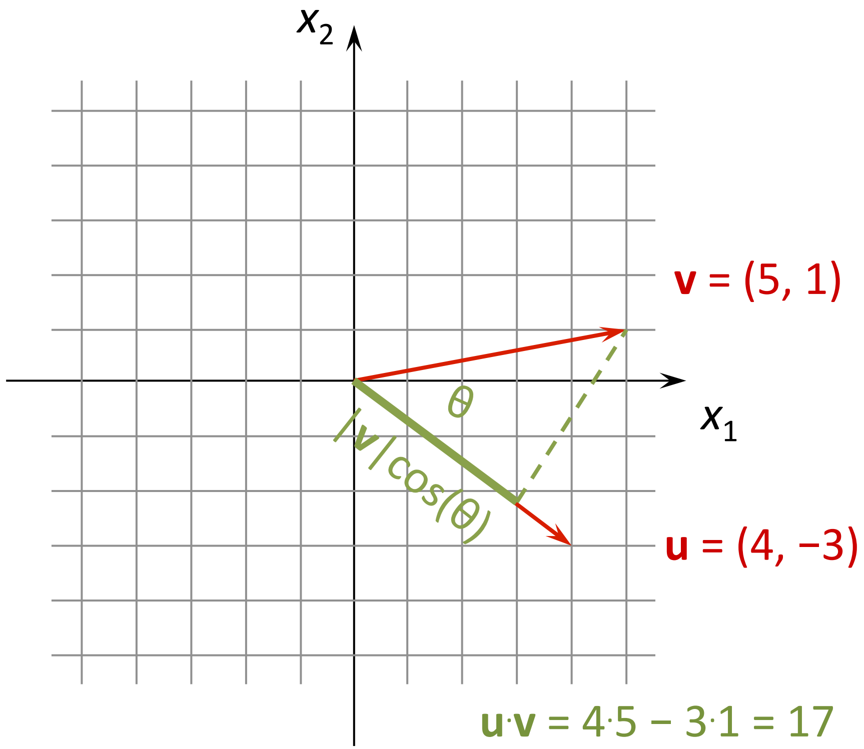


Prodotto scalare

- Dati due vettori **u**, **v** $\in$ IR^n, il loro prodotto scalare è il numero reale **u·v** ottenuto sommando i prodotti delle componenti con uguale indice: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n \in$ IR
- Si ha $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cos(\theta)$
- In altre parole, **u·v** è uguale al modulo di **u** per la lunghezza della proiezione di **v** sulla direzione di **u**
(col segno − se $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$)

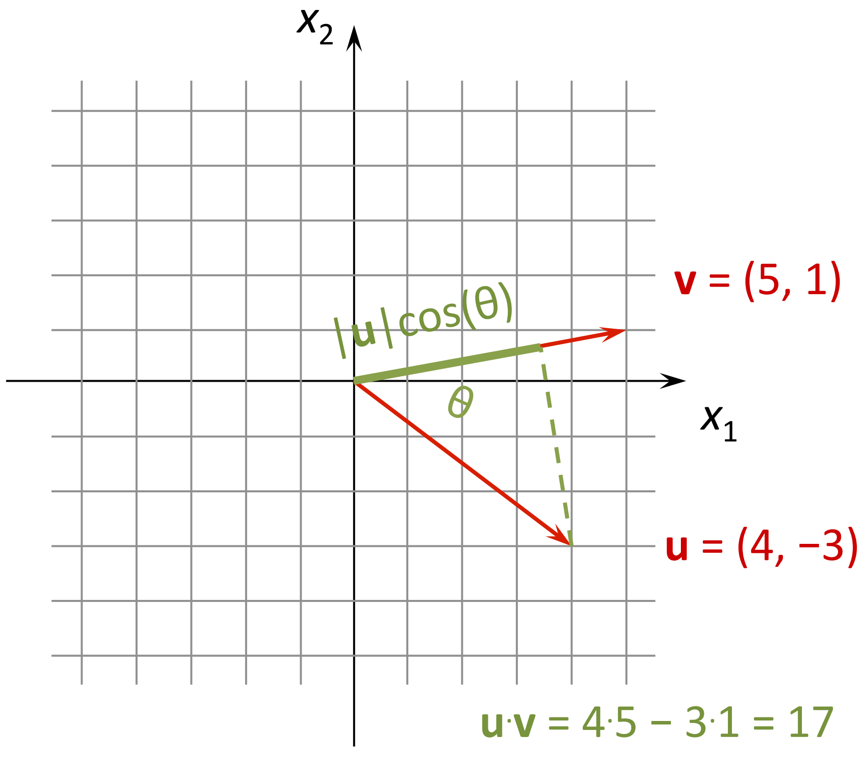
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$|\mathbf{v}|\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|} = \frac{17}{5}$$



Prodotto scalare

- Dati due vettori **u**, **v** $\in \mathrm{IR}^n$, il loro prodotto scalare è il numero reale **u·v** ottenuto sommando i prodotti delle componenti con uguale indice: **u·v** = $u_1v_1 + \ldots + u_nv_n \in \mathrm{IR}$
- Si ha **u·v** = |**u**|·|**v**|cos(θ)
- Siccome **u·v** = **v·u**, il prodotto scalare è anche uguale al modulo di **v** per la lunghezza della proiezione di **u** sulla direzione di **v**



Equazioni lineari

- Un'equazione lineare in n variabili ha la forma

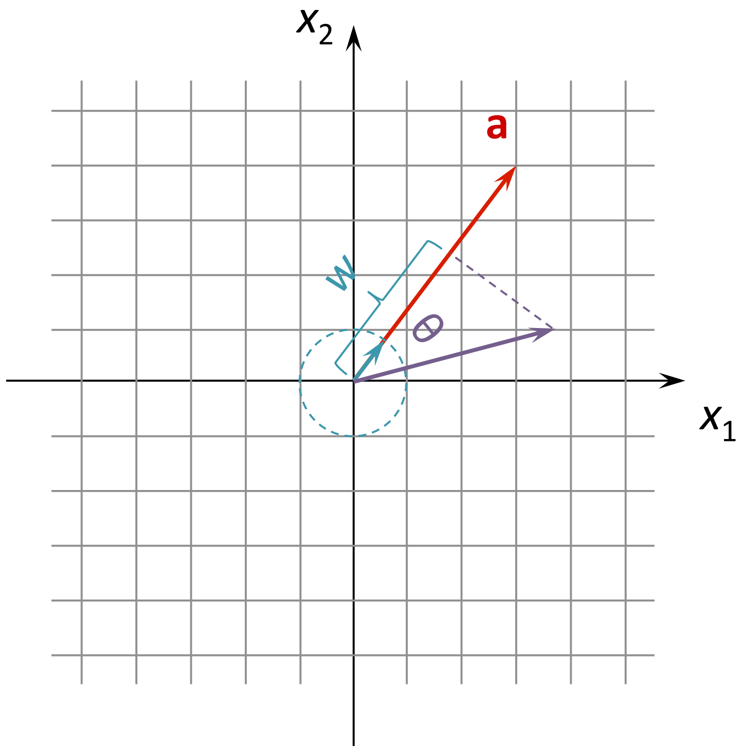
$$a_1 x_1 + \ \dots + a_n x_n = b$$

che dividendo a destra e sinistra per $|\mathbf{a}|$ si riscrive $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = w$ dove $\mathbf{u} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ e $w = b/|\mathbf{a}|$

- Le sue soluzioni sono tutti i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$|\mathbf{x}|\cos(\theta) = w$$

- Cioè quelli che hanno sul versore $\mathbf{u}$ una proiezione di lunghezza data w



Equazioni lineari

- Un'equazione lineare in *n* variabili ha la forma

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$$

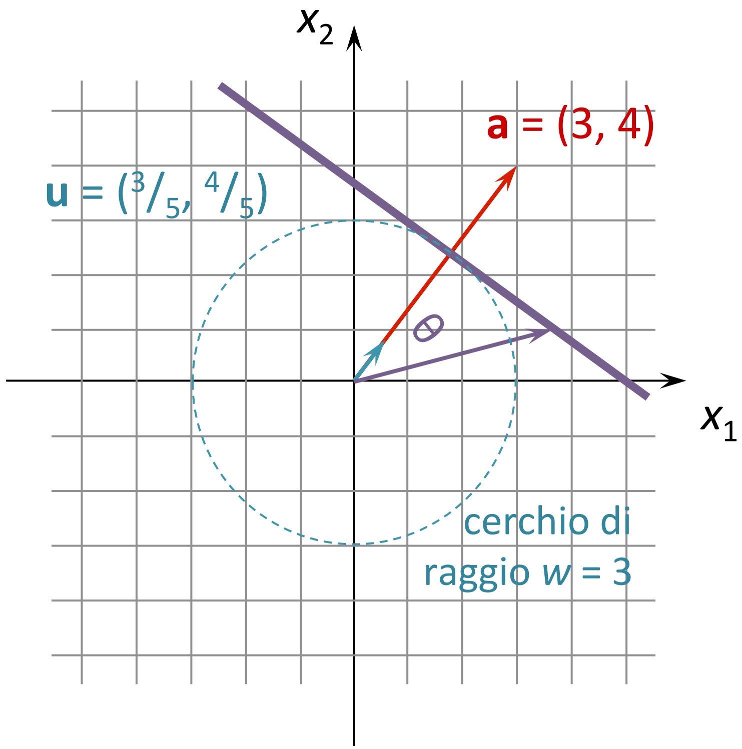
che dividendo a destra e sinistra per $|\mathbf{a}|$ si riscrive $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = w$

Esempio: $3x_1 + 4x_2 = 15$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Dividendo per $|\mathbf{a}|$:

$$\frac{3}{5} x_1 + \frac{4}{5} x_2 = \frac{15}{5} = 3$$



Le soluzioni $\mathbf{x}$ dell'equazione formano la retta viola, perpendicolare al vettore $\mathbf{a}$ e posta a distanza $w = 3$ dall'origine

Equazioni lineari

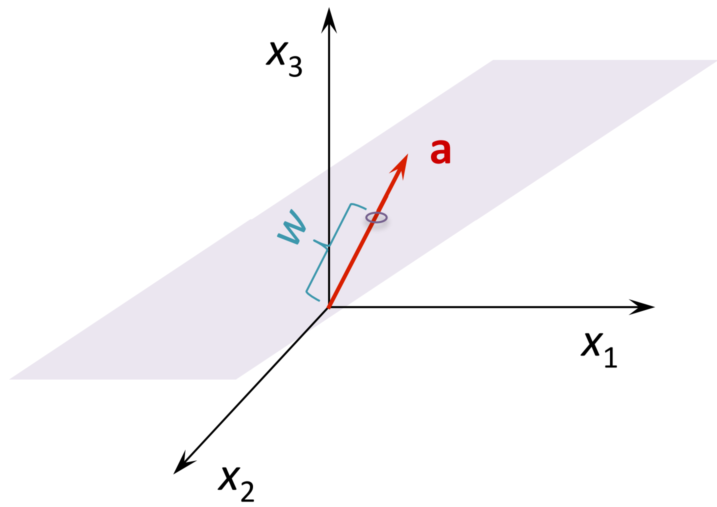
- Un'equazione lineare in n variabili ha la forma

$$a_1 x_1 + \ \ldots + a_n x_n = b$$

  che dividendo a destra e sinistra per $|\mathbf{a}|$ si riscrive $\mathbf{u}\cdot\mathbf{x} = w$

- In IR^3, le soluzioni formano un piano perpendicolare ad **a** e a distanza w dall'origine

- In IR^n si parla in genere di iperpiano



Disequazioni lineari

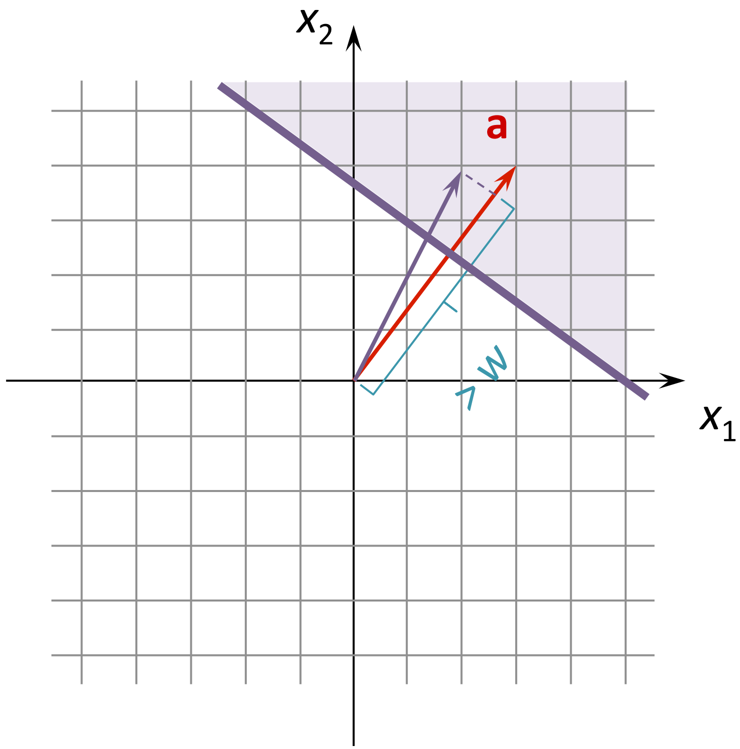
- Una disequazione lineare in *n* variabili ha la forma

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \geq b$$

oppure $$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq b$$

- Queste disequazioni rappresentano semispazi la cui intersezione è la retta origine

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$$



Disequazioni lineari

- Una disequazione lineare in n variabili ha la forma

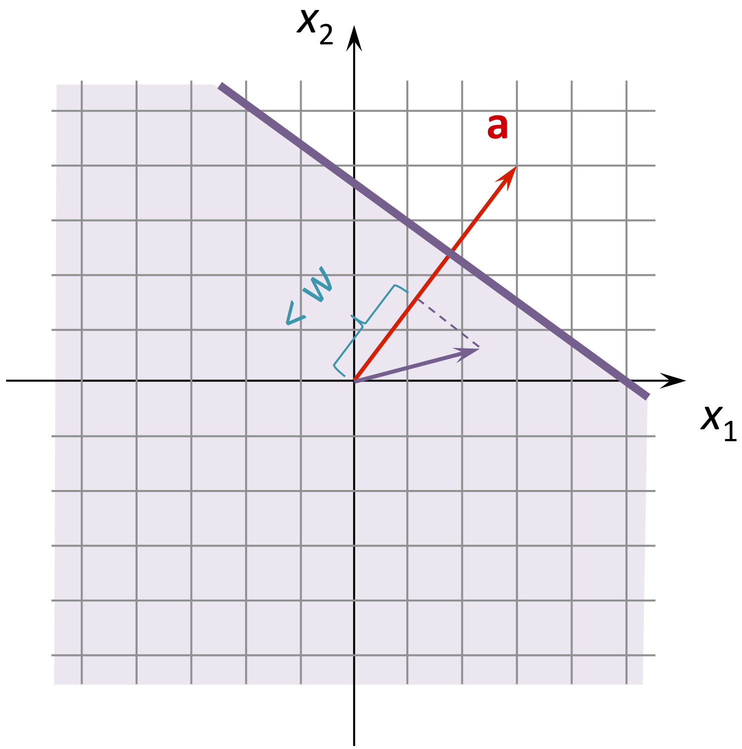
$$a_1 x_1 + \ \dots + a_n x_n \geq b$$

oppure $$a_1 x_1 + \ \dots + a_n x_n \leq b$$

- Queste disequazioni rappresentano semispazi la cui intersezione è la retta origine

$$a_1 x_1 + \ \dots + a_n x_n = b$$

- Un sistema di disequazioni **Ax $\leq$ b** rappresenta quindi l'intersezione di un numero finito m di semispazi chiusi



Disequazioni lineari

- Una disequazione lineare in *n* variabili ha la forma

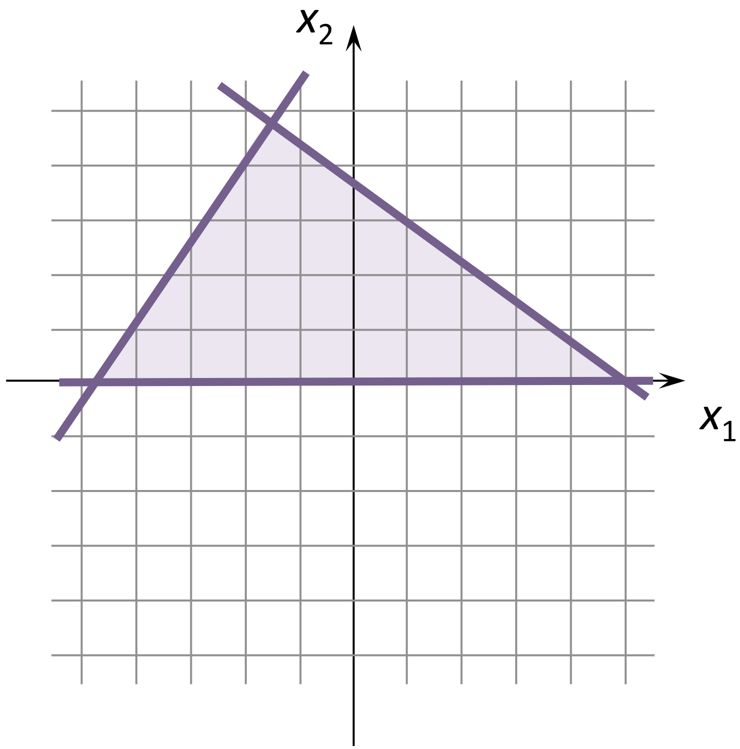
$$a_1 x_1 + \ \dots + a_n x_n \geq b$$

oppure $$a_1 x_1 + \ \dots + a_n x_n \leq b$$

- Queste disequazioni rappresentano semispazi la cui intersezione è la retta origine

$$a_1 x_1 + \ \dots + a_n x_n = b$$

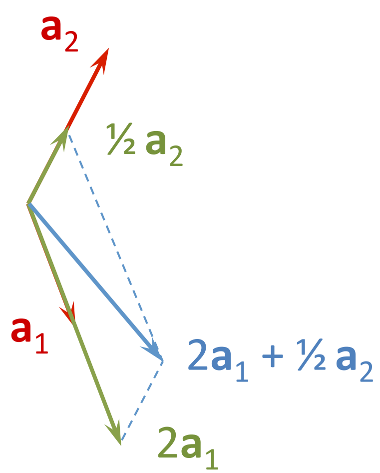
- Un sistema di disequazioni **Ax ≤ b** rappresenta quindi l'intersezione di un numero finito *m* di semispazi chiusi
- Cioè un poliedro convesso



che può essere illimitato o limitato (e in particolare vuoto)

Combinazione lineare

- Una combinazione lineare di m vettori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathrm{IR}^n$ è un vettore $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{a}_m \in \mathrm{IR}^n$, dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathrm{IR}$



- Un sistema di equazioni lineari **Ax** = **b**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

chiede di trovare i coefficienti x_k da usare in una combinazione lineare delle colonne di **A** che dia come risultato il vettore **b**

Combinazione lineare

- Una combinazione lineare di m vettori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathrm{IR}^n$ è un vettore $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{a}_m \in \mathrm{IR}^n$, dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathrm{IR}$

  - Un sistema di equazioni lineari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ \\ a_{n2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1m} \\ \\ a_{nm} \end{bmatrix} x_m = \begin{bmatrix} b_1 \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

  chiede di trovare i coefficienti x_k da usare in una combinazione lineare delle colonne di **A** che dia come risultato il vettore **b**

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è un poliedro convesso, perché si può scrivere $\begin{cases} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ -\mathbf{Ax} \leq -\mathbf{b} \end{cases}$

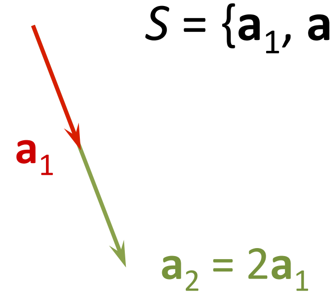
Combinazione lineare

- Una combinazione lineare di m vettori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ è un vettore $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$, dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$
- Variando i coefficienti λ_k in ogni modo possibile, si ottengono i vettori di un sottospazio $\sum$ di $\mathbb{R}^n$
  - Per definizione, un sottospazio deve contenere il vettore nullo **0**, e se contiene i vettori **u**, **v**, allora deve contenere ogni loro combinazione lineare $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$
  - Con $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ si ha il vettore nullo **0**;
  - Se $\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{a}_m$ e $\mathbf{v} = \mu_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \mu_m\mathbf{a}_m$, allora $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ è una combinazione lineare di $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ a coefficienti $(\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1), \ldots, (\alpha\lambda_m + \beta\mu_m)$

Indipendenza lineare

- Un insieme S di m vettori è linearmente indipendente se il vettore nullo si può ottenere solo combinandoli linearmente con coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ identicamente nulli
- In caso contrario, S si dice linearmente dipendente

$S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} \subseteq \mathrm{IR}^2$



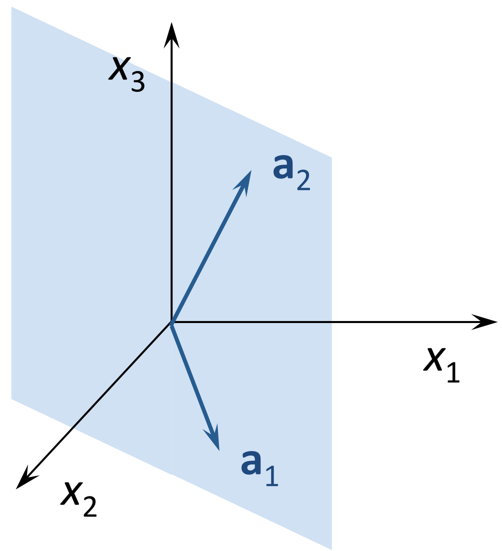
$\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$ con $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$

Quindi A è linearmente dipendente

- Se S è indipendente, i suoi m vettori generano il sottospazio $\Sigma = \mathrm{IR}^m \subseteq \mathrm{IR}^n$

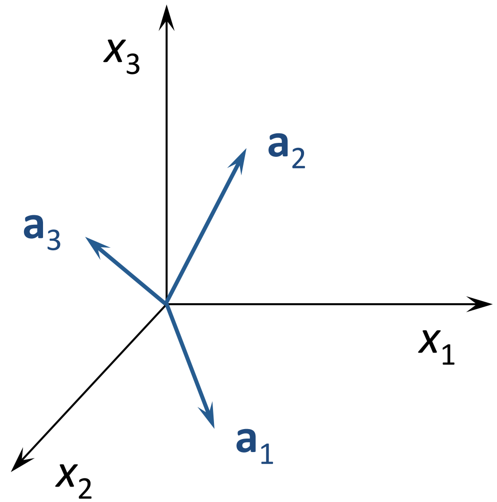
Indipendenza lineare

- Ad esempio, due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2 \in \mathrm{IR}^3$ generano il sottospazio $\sum = \mathrm{IR}^2 \subseteq \mathrm{IR}^3$



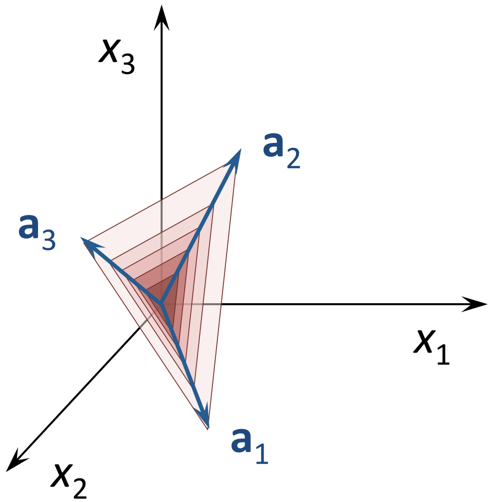
Indipendenza lineare

- Tre vettori linearmente indipendenti $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3 \in \mathrm{IR}^3$ generano il sottospazio $\sum = \mathrm{IR}^3 \subseteq \mathrm{IR}^3$



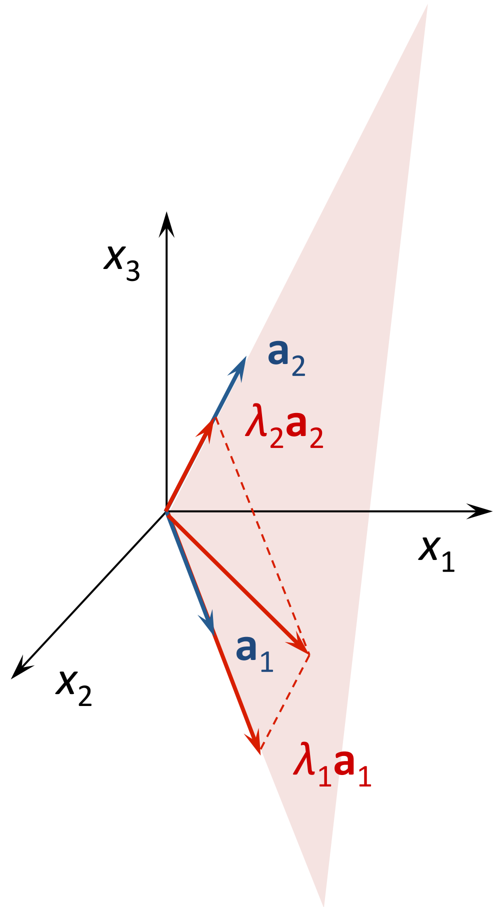
Combinazione conica

- Una combinazione conica è una combinazione lineare con $\lambda_k \geq 0$
- Tutti i vettori ottenibili da combinazioni coniche di un insieme finito $S \subseteq \mathbb{R}^n$ formano un cono poliedrale



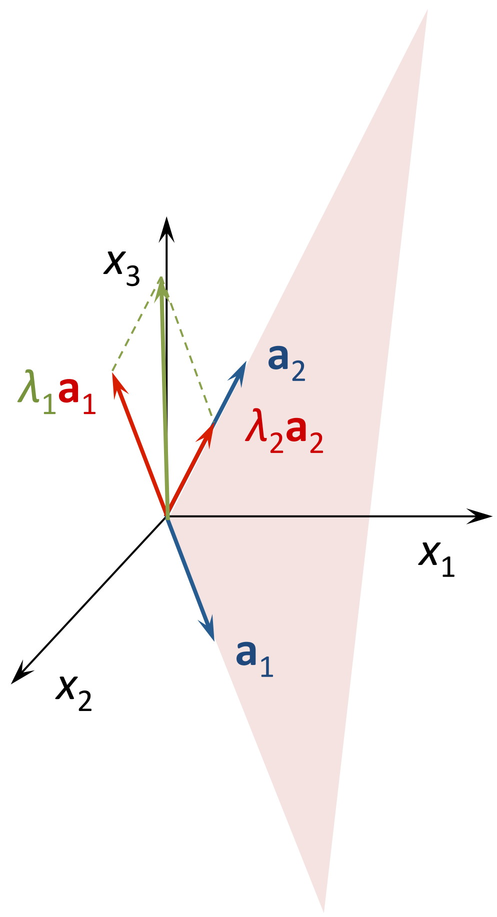
Combinazione conica

- Una combinazione conica è una combinazione lineare con $\lambda_k \geq 0$
- Tutti i vettori ottenibili da combinazioni coniche di un insieme finito $S \subseteq \mathrm{IR}^n$ formano un cono poliedrale



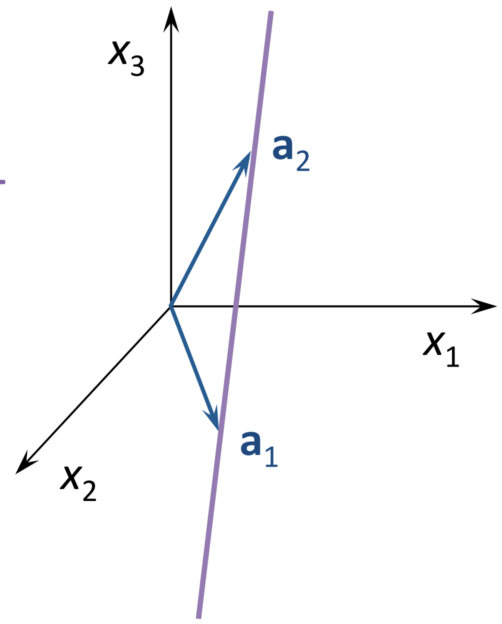
Combinazione conica

- Una combinazione conica è una combinazione lineare con $\lambda_k \geq 0$
- Tutti i vettori ottenibili da combinazioni coniche di un insieme finito $S \subseteq \mathbb{R}^n$ formano un cono poliedrale



Combinazione affine

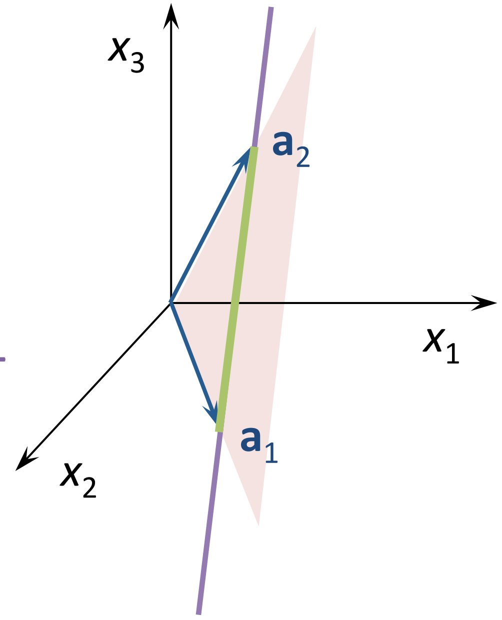
- Una combinazione affine è una combinazione lineare con $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$
- Tutti i vettori ottenibili da combinazioni affini di un insieme finito $S \subseteq \mathrm{IR}^n$ formano uno spazio affine



In uno spazio affine S, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ non appartiene a S, ma $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ giace su S

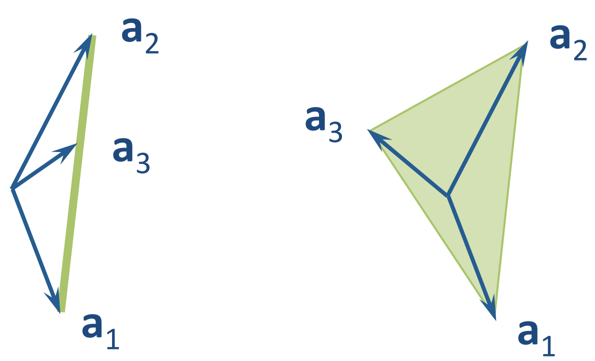
Combinazione convessa

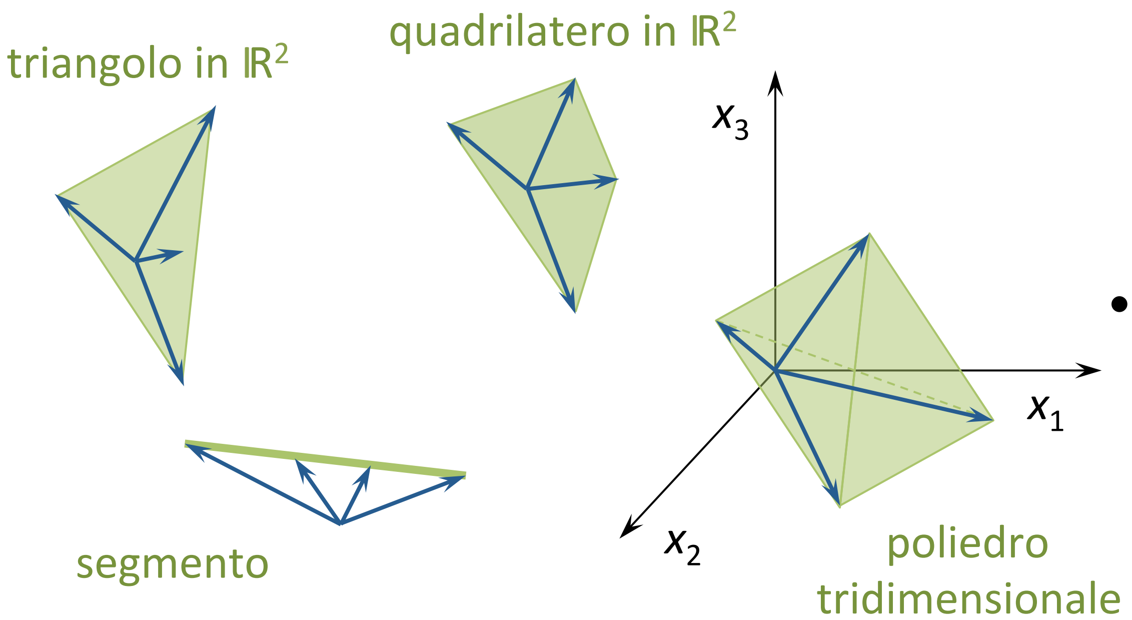
- Una combinazione convessa è ad un tempo conica e affine
- Tutte le combinazioni convesse di S formano l'involucro convesso
- Una combinazione conica è una combinazione lineare con $\lambda_k \geq 0$
- Una combinazione affine è una combinazione lineare con $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$
- Quindi in una combinazione convessa si ha sia $\lambda_k \geq 0$, sia $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$



Combinazione convessa

- Una combinazione convessa è ad un tempo conica e affine
- Tutte le combinazioni convesse di S formano l'involucro convesso
- Ad esempio, l'involucro convesso di tre vettori può essere un triangolo…
- … ma anche no

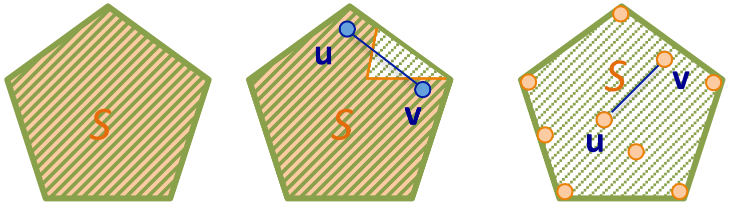




- Anche quello di quattro vettori può assumere aspetti diversi, e così via

Insieme convesso

- Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ (non necessariamente finito) si dice convesso se presi comunque due punti $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ il segmento R che li unisce è interamente contenuto in S



convesso | non convesso | non convesso

$S = \mathrm{conv}(S)$ | $S \neq \mathrm{conv}(S)$ | $S \neq \mathrm{conv}(S)$

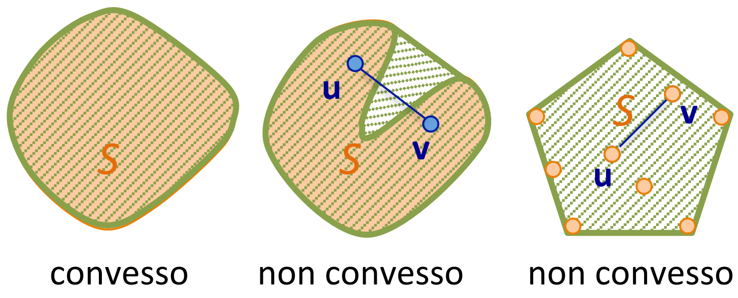
Gli $\mathbf{r} \in R$ sono le combinazioni convesse di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{r} = \lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v} \text{ per } 0 \leq \lambda \leq 1$$

- L'involucro convesso conv(S) di un insieme S è convesso (stupirebbe il contrario…)
- Precisamente, è il più piccolo insieme convesso che contiene S

Insieme convesso

- L'involucro convesso di un insieme finito di punti è <u>sempre</u> un poliedro convesso, e come tale è descritto da un sistema di disequazioni lineari $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$



S = conv(S) $S \neq$ conv(S) $S \neq$ conv(S)

Dato però un insieme finito S, trovare **A** e **b** che rappresentano conv(S) può non essere semplice

- L'involucro convesso conv(S) di un insieme S è convesso (stupirebbe il contrario…)
- Precisamente, è il più piccolo insieme convesso che contiene S